Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions.

Antoine Dagher

UNIVERSITE PARIS VII

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée par Antoine DAGHER.

Sujet de la thèse :

Environnement Informatique
et
Apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions.

soutenue le 1 Avril 1993 devant la commission d'examen

Président :	J. CHASTENET DE GERY
Rapporteurs :	R. GRAS
	S. HOCQUENGHEM
	F. PLUVINAGE
Examinateurs :	M. ARTIGUE
	N. BALACHEFF
	M. J. PERRIN

UNIVERSITE PARIS VII

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée par Antoine DAGHER.

Sujet de la thèse :

Environnement Informatique
et
Apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions.

soutenue le 1 Avril 1993 devant la commission d'examen

Président :	J. CHASTENET DE GERY
Rapporteurs :	R. GRAS
	S. HOCQUENGHEM
	F. PLUVINAGE
Examinateurs :	M. ARTIGUE
	N. BALACHEFF
	M. J. PERRIN

A ma mère et à Maha

REMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et la contribution de plusieurs personnes que je voudrais ici remercier.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame Michèle ARTIGUE mon directeur de thèse, car c'est grâce à ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité que ce travail a pu être fait.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Régis GRAS pour avoir suivi mon travail avec un intérêt constant, pour ses précieux conseils et ses encouragements stimulants.

Je remercie vivement Messieurs Serge HOCQUENGHEM et François PLUVINAGE pour avoir bien voulu accepter d'être rapporteurs de ma thèse et pour leurs remarques et suggestions.

Je remercie également Madame Marie-Jeanne PERRIN pour l'intérêt qu'elle a manifesté à l'égard de mon travail, pour ses remarques et pour avoir accepté d'être membre de la commission d'examen de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Jérôme CHASTENET DE GERY qui a bien voulu accepter d'être président de mon jury de thèse, et à Monsieur Nicolas BALACHEFF pour avoir accepté d'être membre du jury.

Enfin, je remercie : Olivier ARTIGUE pour son aide dans la réalisation de la version "enseignement" du logiciel qui a été construit pour cette thèse, l'équipe didactique de RENNES et en particulier Saddo AGG ALMOULOUD et André TOTOHASINA pour leur aide dans le traitement des données, l'équipe de l'IREM de PARIS 7 et en particulier Jacqueline BELLOC et Maha ABBOUD pour leur participation à la passation des tests et à l'organisation des séances informatiques, au personnel de l'IREM et en particulier Odette DIERAERT et Nadine LOCUFIER pour le soin apporté à l'impression de cette thèse.

SOMMAIRE

CHAPITRE IV : ORGANISATION GENERALE DE L'EXPERIMENTATION ET OUTILS D'ANALYSE

CHAPITRE V : L'EXPERIMENTATION AU SECOND CYCLE

PARTIE I TESTS : PASSATION ET RESULTATS

PARTIE II : SEANCE INFORMATIQUE ET EXEMPLES DE TRAVAUX D'ELEVES

PARTIE III : ANALYSES GLOBALES DE DONNEES RECUEILLIES

INTRODUCTION

L'étude des possibilités ouvertes à l'enseignement des mathématiques par les environnements d'apprentissage informatisés est aujourd'hui une question particulièrement importante en didactique. Elle l'est du fait de la multiplication de tels environnements, des jugements péremptoires aussi bien positifs que négatifs formulés à leur égard, de la faiblesse de nos connaissances sur les processus cognitifs en jeu dans les interactions élève/machine, donc a fortiori sur les conditions d'une exploitation efficace et contrôlée de tels environnements.

Notre recherche a l'ambition de contribuer au développement des connaissances nécessaires dans ce domaine. Elle concerne un domaine précis : celui de la conceptualisation de la notion de fonction et plus précisément l'articulation des cadres graphique et algébrique via l'articulation des registres algébrique et graphique de représentation de l'objet fonction.
Si nous avons choisi ce domaine, c'est d'une part parce que les difficultés relatives à cette articulation et leur résistance à l'enseignement usuel ont été mises en évidence par diverses recherches, d'autre part parce que le discours ambiant sur les potentialités de l'outil informatique insiste justement sur les connexions dynamiques qu'il permet entre cadre algébrique et cadre graphique. Nous avons choisi de privilégier l'étude de l'articulation des deux registres dans le sens du graphique vers l'algébrique, diverses recherches ayant montré que l'articulation dans ce sens était particulièrement problématique pour les élèves.

L'environnement informatique qui sert de support à la recherche et a été élaboré spécifiquement pour elle est un environnement de type jeu : une courbe apparaît sur l'écran, en trouver une équation en gérant au mieux un capital de points et les aides permis par le logiciel. Il vise plus précisément l'étude des processus d'apprentissage liés à la construction du sens des coefficients de l'équation associée à une courbe, dans un repère donné, en permettant de faire varier la forme algébrique de cette équation et le type de courbes considérées.

Notre recherche a donc en premier lieu une ambition cognitive : identifier et analyser les processus en jeu dans l'adaptation de l'élève à un tel logiciel, essayer de préciser les relations existant entre adaptation au logiciel et apprentissage mathématique de l'articulation visée, et à travers cette étude, chercher à déterminer les conditions optimales d'utilisation d'un tel logiciel dans l'enseignement.
A travers cette étude cognitive, il s'agit aussi sur le plan didactique de chercher à déterminer les processus en jeu dans l'interaction élève/logiciel et d'apporter des éléments de réponse aux préoccupations déjà citées. Mais, à nos yeux la recherche ne se limite pas à cela. On met en effet souvent en avant l'intérêt "cognitif" des environnements informatiques mais il nous semble que dans une perspective didactique leur intérêt ne se limite pas à ceci. En particulier, l'enregistrement des interactions élève/machine, lorsqu'il est intégré au logiciel, donne systématiquement accès à des observables "microscopiques" auxquels les environnements usuels donnent plus difficilement accès. Comment exploiter ces nouveaux observables ? Peut-on remonter facilement du niveau "microscopique" aux niveaux plus proches de nos catégories classiques d'analyse en termes de procédures, de schèmes, de conceptions ... ? A quelles difficultés doit-on alors faire face ? Peut-on automatiser, en

partie au moins, le traitement des données recueillies ? Peut-on arriver à une automatisation en temps réel permettant de piloter l'interaction élève/logiciel ?

Il nous a semblé important d'aborder ces questions dans la recherche, et cela a sans aucun doute conditionné notre travail et les outils d'analyse que nous avons élaborés. En particulier cela nous a obligé à élaborer un logiciel, les logiciels existants auxquels nous avions accès n'intégrant pas l'enregistrement automatique.

Le logiciel construit a été expérimenté dans deux classes dans des conditions différentes. L'analyse des données recueillies a conjugué de façon dialectique des méthodes classiques d'analyse de données (analyse de correspondances, analyse hiérarchique, analyse implicative) appliquées à des codages préétablis et l'analyse qualitative des fichiers d'élèves.

L'expérimentation, bien que limitée, met en évidence de manière nette l'aide que peut apporter le logiciel aux apprentissages visés -même dans le cas d'une interaction de courte durée- et permet, par la comparaison des deux situations expérimentales, de formuler des hypothèses sur des conditions d'efficacité optimale du logiciel.
L'analyse des données recueillies fournit de son côté les moyens de mieux comprendre par quels processus l'adaptation à un tel environnement peut produire des connaissances mathématiques. En particulier, elle a permis de repérer des moments de "cristallisation" de la prise de sens d'éléments de l'articulation algébrique/graphique et de relier l'apparition de ces phénomènes à certaines caractéristiques contextuelles.
Enfin, il nous semble que l'outil méthodologique que nous avons développé et mis au point au cours de cette recherche, en termes de "connaissances atomiques" et "stratégies", est un outil maintenant opérationnel qui doit pouvoir permettre d'automatiser partiellement l'analyse des fichiers informatiques lors d'expérimentations ultérieures et viser, à plus long terme, l'élaboration d'un logiciel qui pourrait prendre en compte en temps réel cette analyse pour piloter la succession des parties proposées par le logiciel. Comme premier pas dans cette voie, la version actuelle du logiciel inclut un module d'analyse en temps réel des comportements observés en termes de connaissances atomiques et stratégies.

Bien sûr, vu le caractère limité de l'expérimentation, il est clair que les résultats obtenus fournissent seulement des éléments de réponse aux questions initialement posées et demandent à être mis à l'épreuve dans des recherches ultérieures.

CHAPITRE I

PROBLEMATIQUE. CADRE THEORIQUE. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE.

PROBLEMATIQUE. CADRE THEORIQUE, METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Comme nous l'avons écrit dans l'introduction, le cadre général de cette recherche est l'étude des potentialités offertes par les environnements informatiques pour l'enseignement des mathématiques. Cette étude se situe à deux niveaux :

- celui des potentialités offertes par de tels environnements,
- celui des moyens qu'ils fournissent pour l'analyse fine des mécanismes d'apprentissage via l'enregistrement de l'interaction élève/logiciel.

Dans ce chapitre, nous préciserons tout d'abord comment dans la recherche nous avons spécifié ces questions générales et sur quel cadre théorique nous nous sommes appuyé. Nous présenterons ensuite, dans ses grandes lignes, la méthodologie adoptée et les principales étapes de la recherche.

I) PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

Progressivement, depuis une trentaine d'années, l'informatique et les ordinateurs sont entrés dans notre vie sociale. Equipes de recherche, développeurs de produits informatiques n'ont eu de cesse d'élargir le champ des domaines où l'ordinateur avait un rôle à jouer. L'enseignement ne pouvait échapper à ce vaste mouvement culturel. Il n'y a pas échappé.

Le début des années 80 a vu le développement spectaculaire de la micro-informatique qui a nourri un temps les plus folles utopies où didacticiels et micro-mondes résoudraient miraculeusement tous les problèmes, aussi bien d'apprentissage que de pénurie d'enseignants. La recherche débutante se distinguait mal alors du militantisme pionnier. L'ambition était plus de prouver l'efficacité des logiciels construits que de comprendre les mécanismes de cette efficacité. On privilégiait pour cela les méthodes de comparaison statistiques externes entre groupes expérimentaux et groupes témoins. Pourtant, en dépit de la tendance à la réussite des processus expérimentaux, les résultats obtenus ont assez vite conduit à modérer les enthousiasmes initiaux, à s'interroger sur les potentialités réelles des logiciels utilisés, sur l'enjeu réel des activités qu'ils proposaient aux élèves, sur les problèmes posés par leur intégration dans l'enseignement.(cf. par exemple [Dugdale, 1984], [Tall, 1986] [Dreyfus & Eisenberg, 1987], [Gras et al., 1988], [Artigue, 1991])

Ces interrogations sont actuellement au coeur des recherches dans le domaine, des recherches en pleine expansion, mais qui laissent encore bien des questions ouvertes, qu'il s'agisse de l'analyse fine des objets de savoir associés à tel ou tel environnement et des connaissances qu'ils sont susceptibles de mettre en jeu, de la modélisation du fonctionnement de l'élève et de l'identification éventuelle de processus d'apprentissage spécifiques, des questions enfin d'intégration dans les classes.

Notre recherche a pour objectif de contribuer à l'étude de ces questions et plus précisément aux suivantes :

Est-ce que l'adaptation à un logiciel mathématique donné produit nécessairement un apprentissage mathématique exploitable hors de cet environnement ?

Si oui, quels types d'apprentissage sont possibles et quels processus les sous-tendent?

Il est clair que, telles que, ces questions restent inaccessibles à un travail didactique. C'est pourquoi, nous les avons spécifiées en choisissant un domaine mathématique précis, un problème conceptuel précis relatif à ce domaine et un type d'environnement informatique précis.

Nos choix ont été guidés par les considérations suivantes :

- Choisir un domaine et un problème conceptuel présentant des difficultés d'apprentissage reconnues, résistantes à l'enseignement traditionnel.
- Choisir un domaine et un problème conceptuel pour lequel il était raisonnable de faire l'hypothèse que l'outil informatique pouvait apporter une aide efficace à l'apprentissage notamment en autorisant des interactions difficilement réalisables dans l'environnement papier/crayon usuel.
- Choisir un type de logiciel favorisant l'exploration, l'émission de conjectures et fournissant à l'élève des feed-back systématiques sur la validité de ses propositions.

DOMAINE MATHEMATIQUE ET PROBLEME CONCEPTUEL CHOISIS

Le domaine mathématique choisi est celui des fonctions et le problème précis est celui de la conceptualisation des relations entre les représentations algébrique et graphique de l'objet fonction, ses représentations symboliques principales dans l'enseignement du second degré.

Ce choix nous a semblé justifié par les raisons suivantes :

- l'importance du concept de fonction en mathématique,
- le fait que l'apprentissage des articulations entre les diverses représentations symboliques de l'objet fonction pose des problèmes d'enseignement largement attestés par les recherches didactiques (cf. chapitre II),
- le fait que l'on peut faire l'hypothèse que l'outil informatique par le système de multi-fenêtrage et de représentations graphiques dynamiques qu'il offre peut aider à construire des situations mettant en jeu les connaissances relationnelles visées.

Ce n'était bien sûr pas le seul domaine susceptible de satisfaire les conditions que nous nous étions fixé mais notre mémoire de D.E.A. nous avait sensibilisé aux difficultés cognitives de l'articulation algébrique/graphique et à l'inefficacité didactique de l'enseignement usuel.

LE TYPE DE LOGICIEL CHOISI

Les logiciels utilisés dans l'enseignement sont de types très divers. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous avons choisi un logiciel de type jeu pour diverses raisons :

- un tel logiciel satisfaisait les conditions d'interaction élève/machine explicitées plus haut,

- il nous paraissait intéressant d'étudier en priorité les processus d'adaptation permis par un environnement de type a-didactique,

- enfin, nous voulions étudier si le contexte de jeu souvent utilisé dans les environnements informatiques gênait ou non l'engagement mathématique des élèves.[1]

Bien sûr, nous ne prétendions pas résoudre dans cette thèse l'ensemble des questions posées par l'apprentissage de l'articulation entre les registres algébrique et graphique. Ce que nous avons essayé de faire, plus modestement, c'est :

- d'abord d'élaborer un outil "logiciel" suffisamment riche pour servir de support à l'étude de ces questions tout en étant suffisamment convivial pour permettre des expérimentations locales de courte durée,

- ensuite de tester, à travers quelques expérimentations, l'efficacité mathématique de l'environnement construit en essayant d'identifier un certain nombre de facteurs permettant d'expliquer cette efficacité et ses limites éventuelles.

- enfin de développer des instruments méthodologiques permettant par une analyse automatique en temps réel des fichiers informatiques recueillis dans l'interaction de l'élève avec le logiciel, de rendre compte de son évolution cognitive sur les savoirs visés.

II) REFERENCES ET APPUIS THEORIQUES

Dans cette recherche nous nous sommes appuyé à la fois sur un cadre théorique didactique global et sur des travaux concernant spécifiquement le concept de fonction.

II-1) CADRE THEORIQUE GLOBAL

Notre recherche se situe, comme c'est classique en didactique, dans une perspective constructiviste de l'apprentissage. Nous faisons donc l'hypothèse que l'élève apprend par adaptation à un certain milieu, en un sens problématique pour lui, source de déséquilibres et de conflits cognitifs. C'est via ce milieu que s'organise son interaction avec le savoir. Dans l'environnement utilisé ici, l'interaction de l'élève avec le savoir est médiatisée par une interaction élève/ordinateur. Dans cette interaction, nous faisons l'hypothèse que nous allons pouvoir identifier, à partir des données recueillies, notamment les fichiers enregistrés, des régularités en termes d'actions, de stratégies, que nous essaierons de relier à des connaissances. En nous référant à la théorie des champs conceptuels élaborée par G. Vergnaud, nous pouvons voir dans l'apparition de ces régularités et dans leur évolution la manifestation observable de la constitution et la transformation de schèmes. Citons à ce propos G. Vergnaud :
"La théorie des champs conceptuels repose sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances. On ne peut théoriser sur l'apprentissage des mathématiques ni à partir du seul

---

[1] Le choix d'un logiciel de type jeu par rapport à un logiciel de type tutoriel peut sembler a priori déraisonnable : l'idée de jeu peut écarter cerains élèves d'un rapport d'apprentissage ; l'enseignant et ses médiations possibles sont court-circuités. Mais, en sens inverse, l'idée de jeu contribue à donner un enjeu à la situation et peut motiver les élèves. D'autre part, il nous a semblé nécessaire d'étudier d'abord les processus d'adaptation dans un environnement le plus a-didactique possible avant de poser la question des aides tutorielles qui pourraient être implantées dans l'environnement.

symbolisme, ni à partir des situations seulement. Il faut considérer le sens des situations et des symboles. La clef est de considérer l'action du sujet en situation, et l'organisation de sa conduite. D'où l'importance accordée au concept de schème.
Totalité dynamique et fonctionnelle, le schème n'en appelle pas moins l'analyse. S'il organise la conduite du sujet il comporte des règles d'action et des anticipations. Mais cela n'est possible que parce que fait partie intégrante du schème une représentation implicite ou explicite du réel analysable en termes d'objets, de catégories-en-actes (propriétés et relations) et de théorèmes-en-acte. Ces invariants opératoires organisent la recherche de l'information pertinente en fonction du problème à résoudre ou du but à atteindre, et pilotent les inférences". ([Vergnaud, 1991]).

Sur un plan plus épistémologique, nous considérons que les mathématiques ne se résument pas à des concepts, définitions et théorèmes. Elles incluent des techniques de calculs, des méthodes de raisonnement, et des moyens d'investigation et de vérification. La conjecture est une caractéristique principale de l'activité mathématique, et un outil efficace dans la recherche de solutions lors de la résolution de problèmes et l'exploration de nouveaux concepts. Imre Lakatos [Lakatos, 1984] notamment a mis en évidence le rôle moteur, que jouent les conjectures, dans le développement des mathématiques.
En tant que didacticien, nous considérons que l'enseignement des mathématiques doit respecter cette caractéristique épistémologique des mathématiques et donc réserver un rôle central à l'élaboration, la validation ou la réfutation des conjectures. Nous faisons l'hypothèse que le logiciel élaboré pour les besoins de cette recherche favorise a priori un tel fonctionnement par le système de feed-back qu'il intègre et par l'incitation à l'exploration réfléchie que permet le paramétrage du capital (cf. chapitre III).

Dans notre recherche, le problème conceptuel considéré est celui de l'articulation entre cadres de fonctionnement d'un même objet mathématique, via l'articulation de représentations symboliques relatives à ces cadres. Au delà des raisons liées à la difficulté de cette articulation, notre choix s'appuie aussi épistémologiquement sur l'importance de l'articulation entre cadres de fonctionnement et représentations symboliques des concepts dans le travail et la progression mathématiques, importance largement reconnue en didactique et mise en évidence en particulier en France dans les travaux de R. Douady et R. Duval.
Régine Douady est notamment à l'origine de la notion de cadre, introduite dans sa thèse [Douady, 1984] et définie ainsi dans [Douady, 1986] : "Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées a ces objets et ces relations".
Dans sa thèse, elle développe deux exemples illustrant la place importante de la pratique de changements de cadres dans l'activité professionnelle des mathématiciens et montre que, d'un point de vue didactique, le "jeu de cadres" est un outil à la disposition de l'enseignant et du chercheur permettant d'une part de susciter les déséquilibres cognitifs nécessaires à l'apprentissage, d'autre part de faciliter leur dépassement dans un processus d'équilibration majorante ([Piaget, 1975]). Ces potentialités des jeux de cadres sont directement liées aux décalages existant entre les connaissances des élèves par rapport à un concept donné entre les divers cadres où il peut être amené à fonctionner ainsi qu'à la nécessaire imperfection des systèmes de traduction entre cadres.

Raymond Duval [Duval, 1988] centre, lui, son analyse sur les registres d'expression et de représentation conçus comme des systèmes sémiotiques. Il introduit notamment la notion de congruence sémantique entre deux expressions d'un même objet et utilise cette notion pour étudier les problèmes liés aux passages entre registres.

Dans beaucoup de textes didactiques, la distinction entre cadre et registre n'est pas clairement opérée[2]. Nous opérerons quant à nous cette distinction entre "cadres de fonctionnement" d'un objet mathématique et "registres de représentation" de cet objet, en nous référant pour l'illustrer à un exemple utilisé par M. Artigue dans [Artigue, 1990], celui des nombres complexes. L'objet nombre complexe fonctionne dans le cadre algébrique comme dans le cadre géométrique. Dans le cadre algébrique, on peut considérer plusieurs registres de représentation : le registre cartésien, le registre trigonométrique, le registre exponentiel et le registre intrinsèque (utilisant des représentations sémiotiques comme $|z|$, $\bar{z}$, $1/z$, argz) ; dans le cadre géométrique, de même, on peut considérer les registres ponctuel et vectoriel. Ainsi, le travail dans un même cadre peut solliciter plusieurs registres et le jeu de cadres implique nécessairement des passages entre registres. Comme le suggère le schéma suivant, il y a donc six articulations de registres dans le cadre algébrique de fonctionnement, une dans le cadre géométrique (la liaison verticale), et l'articulation entre ces deux cadres de fonctionnement peut mettre en jeu huit articulations distinctes de registres de représentation (la liaison horizontale en montre une).

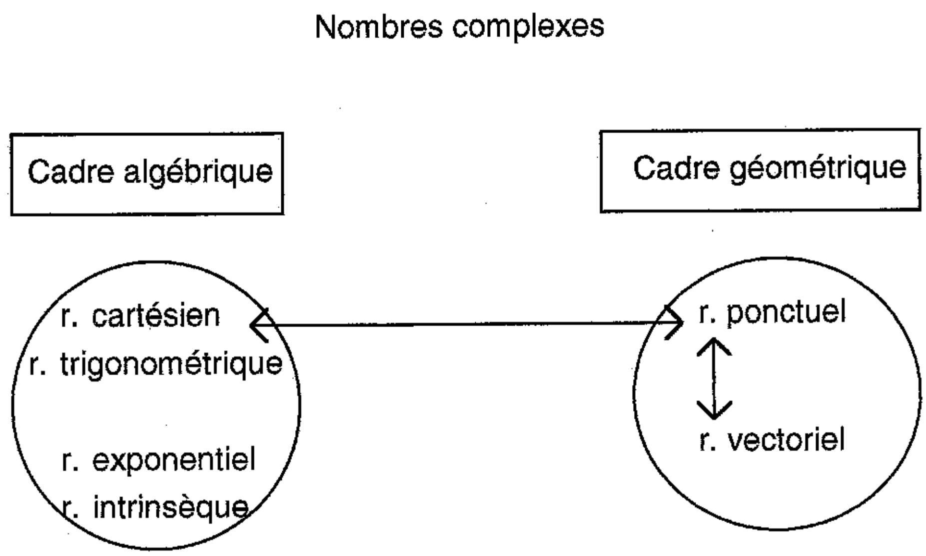


Figure 1-1.

Le concept de fonction fonctionne lui aussi dans plusieurs cadres, les cadres algébrique, numérique, géométrique par exemple, et admet plusieurs registres de représentation : le registre du langage naturel, le registre tableau, le registre algorithmique, le registre graphique, le registre des expressions algébriques, le registre des expressions symboliques intrinsèques

[2] Guzman Retamal [Guzman, 1990] a essayé de préciser cette distinction.

telles f+g, f^{-1}, le registre des expressions iconiques (patates et flèches, schémas ...), chaque registre ayant des caractéristiques sémiotiques propres. Le travail dans un cadre donné peut faire appel à plusieurs registres de représentation. Dans notre recherche qui concerne la conceptualisation de l'articulation des registres algébrique et graphique de représentation, il est évident que les notions de cadre et registre constituent des éléments théoriques fondamentaux.

Enfin, comprendre le fonctionnement de l'élève dans l'environnement informatique utilisé, se poser la question de la dépendance de ce fonctionnement par rapport aux caractéristiques identifiées de cet environnement, ne peut se faire sans situer les décisions prises, les stratégies élaborées par rapport à celles théoriquement possibles, sans les relier aux feed-back que reçoit l'élève qui constituent ses moyens de contrôle et de validation, sans analyser les coûts conceptuels, calculatoires et informatiques des stratégies développées. Les outils de cette analyse sont ceux de la théorie des situations didactiques (cf.[Brousseau, 1986]). Le questionnement associé à la théorie nous a guidé dans la définition du cahier de charges du logiciel puisque nous avons paramétré le logiciel en prenant en compte un certain nombre de variables supposées didactiques (cf. chapitre III). Les outils de la théorie des situations didactiques nous ont, eux, techniquement servi pour l'analyse a priori des situations expérimentales organisées, analyses qui ont été ensuite confrontées aux données issues des expérimentations.

II-2) <u>REFERENCES SPECIFIQUES AU CONCEPT DE FONCTION</u>

Un travail préliminaire sur l'histoire du concept de fonction, non développé ici car il ne s'agit pas d'un travail original, nous a confirmé à la fois, la présence précoce (au 14ème siècle, avec les écoles de philosophie de Paris et d'Oxford) d'une approche graphique de représentations symboliques associées au concept, avant même qu'il ne soit officiellement nommé, et la domination du cadre algébrique dans une longue période de son développement (cf. [Youschkevitch, 1981], [Dahan-Dalmedico, 1986]). En revanche, on ne peut que constater l'intérêt social accordé actuellement aux représentations graphiques de phénomènes fonctionnels alors même que les fonctions en jeu ne sont pas exprimées algébriquement ou que le travail sur les formes algébriques n'est pas prégnant. Ainsi, si épistémologiquement les représentations graphiques n'ont pas la légitimité des représentations algébriques, elles jouissent d'une pertinence épistémologique certaine dans l'enseignement des mathématiques (cf.[Chauvat, 1992]).

En ce qui concerne spécifiquement le concept de fonction, nous nous sommes appuyé sur différents travaux de recherche didactique, en privilégiant bien sûr les travaux concernant les relations entre représentations algébrique et graphique et les travaux liés à l'utilisation de l'outil informatique.
Au début de notre travail, les références étaient relativement réduites. Nous disposions essentiellement de la différenciation entre caractéristiques graphiques ponctuelles-locales-globales introduite par Claude Janvier ainsi que de résultats convergents de différents travaux attestant d'une part les difficultés de conceptualisation de la notion de fonction et le rôle néfaste joué par des introductions ensemblistes générales trop précoces, d'autre part le caractère non évident de l'interprétation autre que ponctuelle de représentations graphiques. Dans le courant

de la recherche, alors que nous avions commencé à forger nos propres instruments d'analyse, nous avons eu connaissance notamment de l'analyse des congruences entre systèmes de représentation développée par R. Duval et de l'analyse des connaissances à trois niveaux utilisée par A. Schoenfeld et ses collègues. Ainsi, au fur et à mesure de la recherche, nous avons essayé d'intégrer à notre réflexion les éléments d'analyse et les résultats qui nous parvenaient de plus en plus nombreux. Nous ne détaillerons pas davantage ici ces références spécifiques puisque le chapitre II leur est partiellement consacré.

III) METHODOLOGIE

Notre recherche, nous l'avons dit, est basée sur l'élaboration d'un logiciel et l'étude du fonctionnement d'élèves face à ce logiciel.

III-1) L'ELABORATION DU LOGICIEL

L'élaboration du logiciel s'est faite en deux étapes : une phase de construction didactique et une phase de réalisation logicielle.
La construction didactique du logiciel s'est appuyée sur les références théoriques générales et spécifiques présentées dans le paragraphe précédent. Ainsi, après une étude bibliographique des recherches existant dans ce domaine, nous avons défini le cahier de charges d'un logiciel adapté à notre problématique. La définition de ce cahier des charges était basée notamment sur l'analyse des variables supposées didactiques que nous voulions pouvoir piloter avec le logiciel. Nous avons ensuite étudié les logiciels disponibles sur les fonctions, en nous limitant à ceux basés sur l'interaction des cadres algébrique et graphique et susceptibles d'être utilisés avec le matériel équipant les établissements scolaires. Ils étaient peu nombreux ; aucun ne répondait à nos attentes et, d'autre part, aucun ne permettait l'enregistrement automatique souhaité de l'interaction élève/machine. Nous avons donc réalisé pour les besoins de l'expérimentation un logiciel spécifique fonctionnant sur nano-réseau. Ce logiciel fonctionnait sur le principe d'association d'équations et de tracés graphiques, un certain nombre de possibilités d'action paramétrables étant offertes à l'élève pour aider la tâche d'association (cf. chapitre III). Cette version a été expérimentée en classes de troisième, première et terminale.

III-2) EXPERIMENTATION

L'expérimentation a été réalisée dans une méthodologie d'étude de cas. Nous avons laissé les élèves concernés travailler individuellement avec le logiciel pendant une séance d'une heure. Ce travail a été précédé et suivi par un test papier/crayon concernant les connaissances sur l'articulation des deux registres de représentation des fonctions considérées comme susceptibles d'être affectées par un apprentissage en cours de séance. Nous avons choisi deux situations différentes pour cette expérimentation :

- dans la première, les savoirs visés concernent des objets déjà familiers aux élèves et ne sont eux-mêmes plus enjeu officiel d'enseignement au moment de l'expérimentation ; c'est le cas au second cycle où des élèves de première et terminale ont participé à l'expérimentation avec des fonctions polynômes du second degré,

- dans la seconde, les savoirs concernés sont, cette fois, sujet officiel d'enseignement au moment de l'expérimentation ; c'est le cas de l'expérimentation en troisième où les élèves ont travaillé sur des fonctions affines juste après l'enseignement sur ces fonctions.

Le principal outil d'analyse utilisé dans notre recherche est basé sur la notion du "savoir atomique"[3]. L'introduction de cette notion répondait aux nécessités suivantes :

- disposer d'un moyen de décomposition des savoirs mis en jeu,
- avoir la possibilité d'identifier différents niveaux intermédiaires de maîtrise de ces savoirs,
- construire un outil d'analyse qui s'adapte bien à l'automatisation de l'analyse du travail de l'élève dans l'environnement de notre logiciel où les interactions élève-machine enregistrées sont atomisées.

Ainsi, nous avons commencé par un recensement des savoirs atomiques mis en jeu. C'est à partir de ce catalogue de savoirs atomiques que les pré-test et post-test ont été construits. Nous avons ensuite, analysé a priori les situations associées au logiciel, les savoirs mis en jeu dans ces situations, les stratégies possibles des élèves, leur coût et leur efficacité. Les stratégies identifiées n'étant pas directement observables dans les traces des élèves, nous avons défini des "stratégies observables" auxquelles elles s'apparentent comme étant des successions d'actions logicielles. Ces stratégies observables ont été, dans un premier temps, regroupées dans des "tactiques" détectables automatiquement à partir des enregistrements, auxquelles nous avons essayé d'associer des stratégies. A posteriori, l'analyse des résultats a été faite, elle aussi, en termes de savoirs atomiques.
Les tests nous ont servi à mesurer l'effet de la séance informatique sur les connaissances des élèves et à étudier la transférabilité des acquis en séance à l'environnement usuel, les tâches proposées dans les tests et la séance, sans être identiques[4], étant relativement proches.

La comparaison des résultats pré-test/post-test a donc permis de mesurer globalement l'apprentissage. Les connaissances de l'élève manifestées dans les tests ont été exprimées, dans un premier temps, en termes des savoirs atomiques. La comparaison des connaissances sur les différents savoirs pour un même test a permis de mettre en évidence une hiérarchie de ces savoirs suivant leur difficulté relative et d'étudier l'évolution de cette hiérarchie sous l'effet de la séance. Cette hiérarchie a été également utilisée pour effectuer des regroupements significatifs et remonter ainsi du niveau microscopique à des niveaux plus globaux.

---

[3] Cette notion est définie dans le chapitre IV.

[4] La tâche dans le logiciel consiste à trouver pour une courbe tracée sur l'écran les valeurs exactes entières des coefficients associés à une forme d'expression algébrique donnée (E). Dans les tests, les tâches consistent, pour des courbes Ci tracées, soit à identifier les coefficients Fi (essentiellement des entiers), associés à une forme d'expression donnée (E), satisfaisant une propriété donnée relative à un paramètre F de (E), soit à classer dans l'ordre certains de ces Fi, soit enfin à identifier des courbes Ci satisfaisant une relation donnée entre deux des paramètres F et F' de (E).
Dans l'environnement informatique utilisé, la tâche associée peut inclure des sous-tâches plus simples proches de celles des tests comme par exemple, pour gérer efficacement les feed-back, la distinction entre valeur exacte d'un coefficient et valeur erronée proposée ou la comparaison des valeurs fausses proposées, en fonction de critères d'ordre, de signe et de relations particulières.

L'étude des comportements des élèves pendant la séance a été faite à partir de l'observation des élèves, de leurs traces papier/crayon et du recueil informatique de leur interaction avec le logiciel. Les comportements en séance ont été analysés en termes de connaissances atomiques et de stratégies. Sur ce second plan, l'analyse a couplé des méthodes d'analyse statistique qualitative des données et l'analyse fine de protocoles d'élèves. Ainsi une première analyse des protocoles a été effectuée en se rapportant aux tactiques identifiées a priori. Elle a fourni des données qui ont été traitées par des techniques statistiques d'analyse factorielle, implicative et hiérarchique de données. Ces méthodes d'analyse de données ont été pour nous, a priori, le meilleur point d'entrée dans l'analyse des stratégies effectives des élèves, domaine où nous manquions d'hypothèses. Tout en fournissant des résultats intéressants, ces analyses n'ont pas permis de répondre clairement à l'ensemble des questions posées ; de plus, dans certains cas, on a repéré des divergences entre les résultats fournis par telle ou telle. Les problèmes rencontrés ont ainsi attiré notre attention sur l'insuffisance de l'analyse a priori des stratégies et nous ont conduit à la raffiner. Nous sommes ensuite revenus aux protocoles eux-mêmes, en sélectionnant un certain nombre de fichiers qui, au vu des analyses statistiques, étaient en un sens typiques. L'analyse fine de ces protocoles a permis de faciliter la différenciation des stratégies réellement observées en séance, l'identification des connaissances qui les sous-tendaient, et de mieux interpréter les comportements des élèves. Ce retour aux protocoles a aussi permis de repérer certaines régularités associées à la cristallisation de certaines articulations algébrique/graphique et d'identifier certains facteurs les accompagnant. Un retour aux protocoles, global cette fois, a permis de tester la validité des hypothèses faites concernant les processus de progression identifiés dans l'analyse des fichiers typiques.

L'étude et l'analyse des résultats des tests, confrontés aux comportements pendant la séance, a ainsi permis de tester la validité de l'analyse didactique a priori et d'évaluer, partiellement, l'effet du logiciel. L'expérimentation a notamment mis en évidence :

- un effet positif du logiciel dans toutes les classes concernées, et ce dans le cadre d'une très courte durée.
- l'existence de stratégies qualitativement différentes par rapport à l'apprentissage,
- des processus par lesquels pouvait passer l'apprentissage.

Elle a permis, par retour au cahier de charges, de réaliser une version didactifiée du logiciel intégrant des résultats des analyses effectuées (cf. Annexe). Il est clair que les résultats obtenus pourraient également guider l'élaboration d'une version intelligente du logiciel, mais nous ne nous sommes pas lancés dans cette voie.

Précisons que nous n'avons pas utilisé une méthodologie de type comparaison groupe expérimental/groupe témoin parce que dans notre projet, l'essentiel n'est pas de comparer l'effet d'un enseignement dans un environnement informatique à l'effet d'un enseignement traditionnel mais plutôt d'essayer de comprendre le fonctionnement des élèves dans l'environnement informatique utilisé.

Le travail mené permet d'identifier des phénomènes, de préciser des hypothèses sur les processus d'apprentissage potentiels, cependant, étant donné que l'expérimentation ne porte que sur une courte durée d'interaction élève/logiciel, il est difficile de préciser le champ de validité des analyses effectuées. Les résultats de notre recherche devront donc être confirmés par de recherches futures.

Notre problématique et notre méthodologie ayant été ainsi présentées, nous allons détailler dans les chapitres suivants les différentes parties de notre recherche. Nous commencerons par une étude des logiciels et recherches sur les fonctions en mettant l'accent, comme nous l'avons écrit plus haut, sur les travaux portant sur les relations entre les deux registres algébrique et graphique de représentation des fonctions.

CHAPITRE II

RECHERCHES ET LOGICIELS

RECHERCHES ET LOGICIELS

Lorsque nous avons débuté cette recherche, comme nous l'avons souligné, il existait déjà un certain nombre de travaux concernant l'enseignement et l'apprentissage des relations entre systèmes différents de représentation du concept de fonction, ainsi qu'un certain nombre de produits logiciels mettant en jeu simultanément plusieurs systèmes de représentation. Les travaux dans ce domaine n'ont pas cessé de se développer au cours des dernières années. Dans ce chapitre, nous ne prétendons pas en faire une étude bibliographique exhaustive. Nous allons plus modestement essayer de donner une idée de l'évolution des recherches et des produits logiciels en présentant quelques travaux et réalisations qui nous semblent particulièrement intéressants, vu notre propre problématique. Nous nous limiterons ainsi essentiellement à des travaux concernant les relations entre les représentations algébriques et graphiques des fonctions. Nous décrirons rapidement le fonctionnement et les principales caractéristiques des produits logiciels retenus. Pour les recherches, nous insisterons sur la problématique, les outils d'analyse utilisés et les résultats obtenus.

I) LOGICIELS

I-1) EVOLUTION ET CARACTERISTIQUES

Le développement du logiciel éducatif à propos des fonctions est passé, dans ce domaine comme dans d'autres, du stade de l'initiative personnelle de l'enseignant au stade du travail en équipe et, du niveau de la construction artisanale sur la base d'une idée de départ au niveau d'une élaboration plus réfléchie sur le plan didactique. Parallèlement, le matériel informatique utilisé a changé. On a ainsi évolué de programmes simples réalisés rapidement par un enseignant dont l'efficacité était limitée par différents facteurs : difficile portabilité d'un système à un autre, interface rudimentaire et parfois aspects techniques mal maîtrisés, à des projets réalisés par des chercheurs en collaboration avec des professionnels de l'informatique bien plus satisfaisants d'un point de vue ergonomique, techniquement de grande qualité, adaptables à divers environnements informatiques, plus performants aussi sur le plan de l'interaction machine/apprenant. L'évolution a aussi touché des aspects plus profonds et concerné les tâches proposées par les logiciels, leur contenu et leur fonctionnement.

Les logiciels mettant en jeu des questions d'articulation algébrique-graphique ont connu ces dix dernières années une grande expansion. Soulignons que :

a) Les tâches proposées d'un logiciel à l'autre sont sensiblement différentes. Dans certains cas, par exemple, il s'agit de sélectionner, parmi plusieurs règles affichées à l'écran, celle qui lie les coordonnées d'un certain ensemble de points[1], comme par exemple dans "Guess My Rule" de R. B. Davis [Davis, 1982] ou "Dots and Rules" développé par N. Zehavi et ses collègues [Zehavi, 1987]. Dans d'autres cas, il s'agit d'un pilotage algébrique de la fonction pour

[1]Le repère étant muni d'un quadrillage "pointillé".

atteindre une courbe fixée, comme par exemple dans le logiciel "Fonctions Conjointes" réalisé par le CREEM du CNAM et l'IREM de Paris 7 [cf. Imagiciels].

b) Les domaines couverts par ces produits sont eux aussi très variés. Certains ne s'intéressent qu'à une question précise, comme par exemple la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression algébrique. C'est le cas du logiciel "Représentation Graphique" de F.I.L. édité par Nathan et plus généralement de divers traceurs de courbes. D'autres logiciels couvrent un domaine beaucoup plus vaste : "The Visualising Algebra" de J. L. Schwartz et M. Yerushalmy [Schwartz, 1989], par exemple, permet la visualisation simultanée dans les registres "Tableau" et "Graphique" de questions posées dans le domaine de l'algèbre. Cet environnement est ainsi constitué de 4 modules :

- "The Function Analyser" qui permet des translations ou des dilatations suivant les axes.
- "The Function Supposer" qui permet des opérations binaires sur des fonctions.
- "The Function Comparator", deux modules concernant respectivement les fonctions d'une variable et les fonctions de deux variables qui permettent la résolution de certaines équations et inéquations.

c) Ils diffèrent aussi par les sens d'interaction qu'ils autorisent entre les différents registres de représentation des fonctions.
Certains fonctionnent uniquement de l'algébrique vers le graphique. Parmi eux, on trouve les traceurs cités plus haut (qui se différencient entre eux par les types de fonctions qu'ils admettent). On trouve aussi des logiciels plus complets qui permettent, à partir d'une expression algébrique, d'obtenir successivement des tableaux de valeurs numériques et des tracés point par point.
D'autres logiciels fonctionnent, eux, du graphique vers l'algébrique -c'est le cas de "Guess My Rule" déjà cité et du logiciel de jeu "Green Globs" de S. Dugdale- voire du graphique vers le langage naturel comme "Dots and Rules" déjà cité.
Enfin, dans d'autres logiciels, par un système de multi-fenêtrage, les trois représentations (algébrique, numérique, graphique) sont présentes en permanence à l'écran. C'est le cas par exemple pour "Point Grapher" développé par A. Schoenfeld et ses collègues [Schoenfeld et al., 1991], de "Visualising Algebra" ou du logiciel "T. R. M."[2] développé par B. Schwarz [Schwarz, 1988]. Pour ces derniers, lorsque l'on agit sur la représentation algébrique, les autres systèmes de représentation sont immédiatement modifiés.

d) En ce qui concerne la nature des activités associées à ces différents logiciels, on peut aussi distinguer au moins 3 types de logiciels[3] :

- les "imagiciels", associés plus particulièrement à des activités de visualisation et simulation de phénomènes,

---

[2]Triple Representation Model.

[3]Pour une typologie de logiciels, voir [Picard, 1987] et [Tréhard, 1987].

- les logiciels de jeu, associés surtout à des activités de développement de stratégies par rapport à des tâches comportant des mises en relations algébrique/graphique ou algébrique/numérique.
- les tutoriels proposant des exercices d'entraînement.

Notons que le logiciel que nous avons réalisé pour l'expérimentation et dont nous donnerons une présentation détaillée dans le chapitre suivant est de type jeu. Il fonctionne dans le sens du graphique vers l'algébrique, la tâche proposée consiste à associer à une courbe tracée son expression algébrique sous une forme donnée et, en permanence et explicitement, les deux représentations (algébrique et graphique) sont mises en relation.

I-2) <u>EXEMPLES</u>

Nous présenterons rapidement dans ce paragraphe un logiciel de type imagiciel et un logiciel de type jeu. Ce choix est motivé par la compatibilité des possibilités a priori offertes par ces deux types avec notre problématique et par le fait que ces deux logiciels sont à la fois proches (l'accent est mis sur le registre graphique) et différents (les tâches sont différentes) du nôtre.

<u>FONCTIONS CONJOINTES</u>

Ce logiciel est l'un des imagiciels réalisés par le CREEM du CNAM et l'IREM de Paris 7, dans le cadre d'un projet complet d'intégration de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques en classe de seconde. Ce projet a abouti à la réalisation d'un manuel d'enseignement pour la classe de seconde accompagné de logiciels, principalement de type "imagiciel" [cf. Imagiciels].
Dans le logiciel "Fonctions Conjointes" l'élève introduit au clavier l'expression algébrique d'une fonction f et sa représentation graphique F apparaît à l'écran. Il peut alors visualiser, pour chaque valeur choisie de k, le traçage point par point de la représentation de chacune des fonctions :

$$\boxed{x \dashrightarrow f(x+k),\quad x \dashrightarrow f(x)+k,\quad x \dashrightarrow f(k.x) \text{ et } x \dashrightarrow k.f(x)}$$

une couleur spécifique étant associée à chacune de ces quatre transformations. Un effacement des images de F est possible.
On demande donc à l'élève, après avoir introduit l'expression de f, d'introduire la valeur de k choisie. La figure 2.1 montre des écrans intermédiaires obtenus lors du travail d'un élève avec l'imagiciel.

3. X->K*F(X)
2

F(X)=X↑2-4

4. X->F(K*X)
2

F(X)=X↑2-4

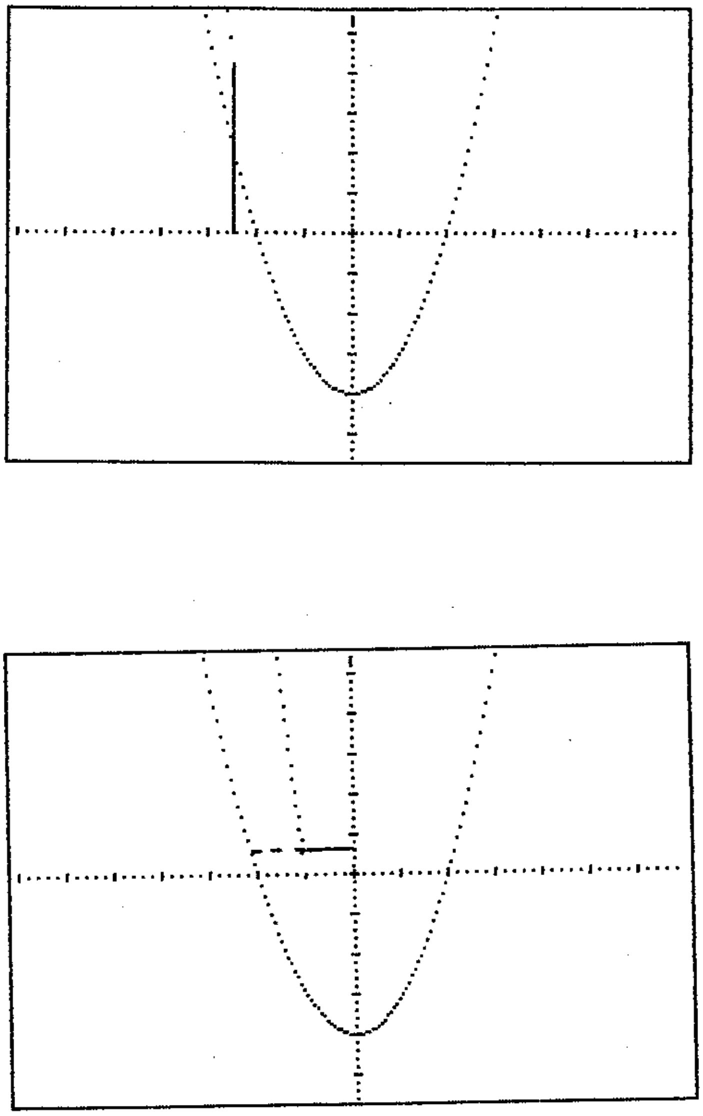


Figure 2-1.

Note : Les deux écrans ci-dessus montrent comment se fait le traçage point par point, à partir de la représentation graphique de f, des représentations graphiques respectives de x----->k.f(x) et x----->f(k.x) dans le cas où k=2 et $f(x)=x^2-4$.

Soulignons qu'il existe un logiciel de jeu associé à cet imagiciel. Dans ce jeu, au départ deux tracés de fonctions, de couleurs différentes, apparaissent sur l'écran: l'un correspond à la fonction de départ dont l'expression algébrique n'est pas donnée, l'autre à la fonction cible. Par un choix judicieux des transformations élémentaires ci-dessus, l'élève doit le plus rapidement possible atteindre la cible.

GREEN GLOBS

Il s'agit de l'un des premiers logiciels de type jeu commercialisés et plusieurs recherches ont été menées dans son environnement [Dugdale, 1982]. Le jeu se joue en plusieurs parties et un score est attribué au joueur. Le jeu, au cours de chaque partie, consiste à atteindre par des graphes successifs les points lumineux (globes) qui sont apparus sur l'écran (muni d'un repère et d'une grille pointillée) au début de la partie. L'élève "tire" une courbe en tapant son équation dans le repère du jeu. La courbe se trace à l'écran et lorsque des globes sont atteints, ils explosent. L'élève marque un score de $2^{n+1}-1$ si le graphe passe par n globes. Puisque le score augmente exponentiellement avec le nombre de globes atteints par un même "tir", l'élève a théoriquement intérêt à choisir une expression algébrique permettant d'atteindre le maximum possible de globes. Les graphes tracés peuvent être effacés par l'élève. La figure 2-2 montre des copies d'écrans successifs dans une partie jouée par un élève. Le premier écran montre l'état initial avec 13 globes. Les autres montrent les trois premiers tirs de l'élève.

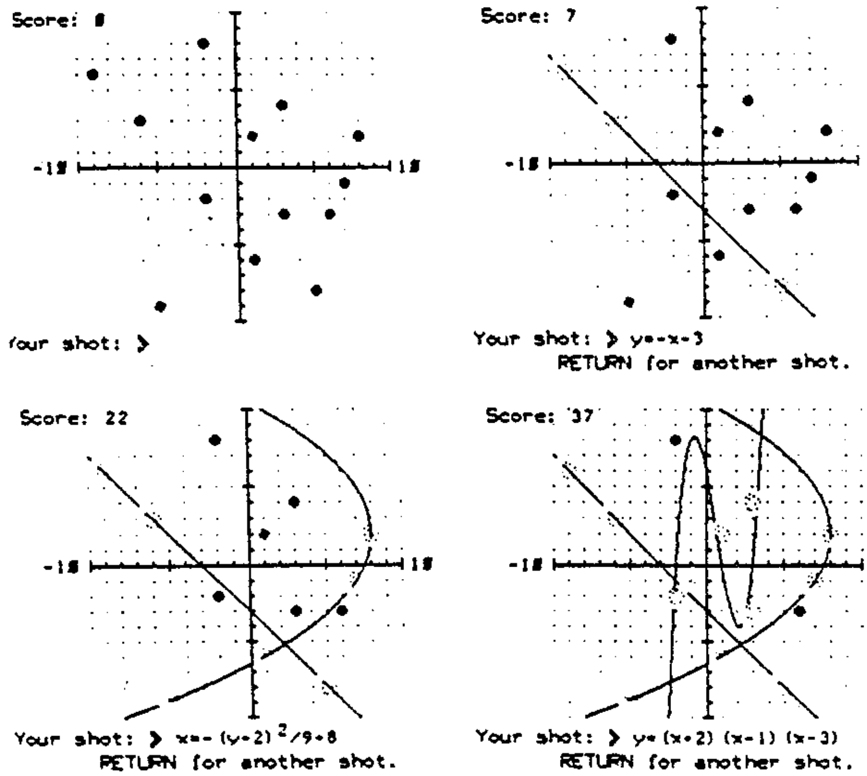


Figure 2-2.

Précisons que les recherches menées dans l'environnement Green Globs ont donné souvent des résultats relativement mitigés et que, bien qu'elles attestent en général une amélioration des compétences des élèves, elles divergent sur la nature de cette amélioration et ses limites. Le travail de Dreyfus et Eisenberg [Dreyfus et Eisenberg, 1987] par exemple, montre que le travail dans cet environnement améliore les compétences visuelles dans le traitement des fonctions mais que :

- le mode visuel d'opération reste souvent très intuitif,
- une minorité d'élèves seulement intègrent le mode visuel et le mode analytique,
- l'amélioration reste locale : elle n'est pas transférée à de nouveaux types de fonctions, ni à des tâches éloignées de celles proposées par le logiciel,
- l'amélioration ne touche que des niveaux d'abstraction peu élevés.

II) RECHERCHES

De nombreuses recherches didactiques sur la notion de fonction ont été menées ces dix dernières années. Le Survey "Functions, Graphs and Graphing : Tasks, Learning, and Teaching" [Leinhardt, 1990] n'en recense pas moins de 150, en se limitant pourtant essentiellement aux élèves de 9 à 14 ans et aux publications de langue anglaise. Ce Survey insiste sur la cohérence entre les résultats obtenus dans les différentes recherches, des recherches qui ont permis de prendre la mesure de la complexité cognitive du champ conceptuel des fonctions, notamment de la conceptualisation des relations entre les divers cadres de représentation des fonctions". Selon les auteurs :

"The topic of functions (in its more advanced form) is extremely complex. This is due to several factors, including the following :

- it is often associated with other complex mathematical concepts (i.e., variable, growth, limit, extremum, pictorial meaning),
- it is integrative in nature, pulling together various subconcepts and fields of mathematics,
- it appears in many different representations."

Ces recherches s'accordent aussi sur l'inadéquation, de ce point de vue, de l'enseignement usuel et nous donnerons, en présentant quelques recherches de façon plus détaillée dans le paragraphe suivant, des résultats attestant clairement cette inadéquation.
De fait, l'étude des recherches menées dans ce domaine met clairement en évidence à la fois la continuité et l'évolution des problématiques et outils d'analyse utilisés.
La liste qui suit essaie de donner une idée des principales orientations développées, en associant à chaque orientation quelques travaux qui en sont typiques :

- l'analyse de l'enseignement (manuels et programmes) : elle apparaît de façon récurrente dès les premiers travaux [Janvier, 1978], [Nadot, 1990],
- l'analyse des tâches de passage entre registres de représentations [Janvier, 1981], [Guzman-Retamal, 1990],

- l'étude des représentations des élèves : intuitions, misconceptions et difficultés [Herscovics, 1982], [Dreyfus & Eisenberg, 1984], [Clement, 1985],

- l'étude des processus psychologiques impliqués par le passage d'un registre de représentation à un autre [Janvier, 1987] et des processus d'apprentissages associés [Dreyfus & Eisenberg, 1984] (modèle tridimensionnel où l'axe Ox est l'axe des cadres de traitement, l'axe Oy est celui des sous-concepts associés et l'axe Oz est celui des niveaux d'abstraction), [Schoenfeld et al, 1991] (structure cognitive modélisant les relations entre registre algébrique et registre graphique sur trois niveaux : niveau du schéma, niveau des propriétés et niveau des connections entre propriétés), [Dubinsky, 1989] (avec une structuration distinguant trois niveaux : action, process, object)

- l'étude des congruences entre systèmes de représentation [Duval, 1988].

- l'étude épistémologique des savoirs, [Sierpinska, 1988] (analyse en termes d'obstacles épistémologiques et actes de connaissance), [Sfard, 1989] (analyse basée sur la distinction entre conception opérationnelle et conception structurelle des objets mathématiques),

Pour ce qui concerne l'articulation des différents registres de représentation des fonctions, la plupart des recherches menées concernent l'articulation du registre graphique et du registre algébrique. Beaucoup des recherches récentes étudient ces relations dans un environnement informatique, comme nous le faisons nous-mêmes dans cette thèse.
On note de plus un intérêt croissant pour l'analyse fine des processus cognitifs en jeu dans l'interaction des cadres graphique et algébrique, ce qui rejoint, là encore, tout à fait nos préoccupations. Le travail de Schoenfeld et de ses collègues, avec son analyse fine du travail d'une seule élève au cours de quatre séances de travail dans un environnement informatique sur lequel nous reviendrons, est typique de cette orientation et de l'évolution subséquente des outils méthodologiques utilisés.

Plus généralement, les recherches en environnement informatique ont évolué, elles aussi. Au départ, semble-t-il, on cherchait plutôt à étudier l'efficacité d'un produit par une étude comparative statistique classique, en prenant comme élément de comparaison un environnement traditionnel papier/crayon [Dugdale, 1982]. Le caractère non décisif de beaucoup de ces comparaisons a sans doute contribué au développement de recherches où l'on se donne les moyens de mieux comprendre l'impact de l'ordinateur sur les objets de connaissances [Tall, 1986, 1992], [Schoenfeld, 1988], [Dubinsky,1992], et le fonctionnement cognitif de l'élève [Schoenfeld et al., 1991], ainsi qu'à analyser d'un point de vue didactique le fonctionnement de situations d'enseignement intégrant l'outil informatique [Artigue, 1992].

II-1) RECHERCHES SUR LES RELATIONS ENTRE LES CADRES ALGEBRIQUE ET GRAPHIQUE

Ces recherches portent sur le rôle de ces relations dans la conceptualisation de la notion de fonction, sur leur place dans l'enseignement et les manuels, sur les compétences des élèves et les difficultés d'apprentissage rencontrées.

Elles mettent clairement en évidence l'existence de difficultés résistantes. Mais l'analyse des tâches où apparaissent ces difficultés, l'étude des processus cognitifs qui y sont impliqués montrent que ces difficultés ne sont pas toutes de même nature.
Claude Janvier, en particulier, a attiré l'attention sur les processus impliqués dans le passage d'un système de représentation à un autre, les opérations de traduction associées et leur absence de symétrie. Il montre aussi que l'interprétation graphique ne se réduit pas à la lecture graphique qui, elle, peut se faire point par point, mais nécessite le recours à des procédures autres que ponctuelles [Janvier, 1978]. D'autres recherches confirment cette disymétrie en général.
Certaines recherches montrent que l'enseignement privilégie le passage algébrique -----> graphique. Zaslavsky [Leinhardt, 1989], par exemple, a montré que, face aux deux tâches (qui semblent parallèles) : trouver laquelle des 4 paraboles correspond à une équation donnée ou laquelle des 4 équations correspond à une parabole donnée, les élèves ont tendance à fonctionner toujours de l'algébrique vers le graphique. Ce passage, qui peut se faire point par point et qui n'implique pas nécessairement de choix, est plus facile que la traduction inverse, mais il faut noter que souvent le passage algébrique -----> graphique ne donne pas non plus de bons résultats. Les résultats du National Assessment of Educational Progress indiquent que 18% seulement des élèves de 17 ans produisent correctement des graphes à partir d'équations affines et 5% seulement sont capables de fournir l'équation d'une droite à partir des coordonnées de ses intersections avec les axes : (-3 ; 0) et (0 ; 5) en l'occurrence. Markovits et ses collègues [Markovits, 1986] montrent que, lorsque les fonctions ne sont pas familières, les traductions dans les deux sens sont également difficiles pour des élèves de 14-15 ans. Kerslake et Zaslavsky [Leinhardt, 1989] montrent que les traductions sont particulièrement difficiles pour les élèves quand certains coefficients sont nuls (fonctions constantes et fonctions polynômes du second degré non complètes).

II-2) <u>EXEMPLES</u>

Nous présenterons et commenterons de façon plus détaillée dans ce qui suit quatre recherches récentes qui nous semblent en relation étroite avec notre propre travail. Les paragraphes en petits caractères sont des extraits des textes cités en référence. Ces recherches sont les suivantes :

- R. Duval (1988) , Graphiques et Equations : L'articulation de deux registres.

- I. Guzman-Retamal (1990), Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.

- S. Nadot (1990), Représentations graphiques et études de fonctions. Les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère. Une approche par la programmation informatique d'un traceur de courbes.

- A. Schoenfeld, J. Smith, A. Arcavi (1991), The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain.

La première recherche traite de l'identification des éléments spécifiques significatifs de chacun des registres algébrique et graphique d'une fonction et de la dissymétrie des relations entre ces deux registres, en introduisant la notion très intéressante de congruence entre éléments sémiotiques de représentations et la deuxième, en s'appuyant sur ce cadre théorique, étudie plus précisément des tâches d'articulation des deux registres. La quatrième, déjà citée, rejoint elle aussi nos préoccupations d'analyse fine des processus cognitifs mis en jeu par l'articulation des deux registres algébrique et graphique. La troisième recherche est moins directement liée à nos préoccupations mais elle nous intéresse par ce qu'elle nous apprend sur la complexité des problèmes liés au changement de repère, essentiels pour l'articulation algébrique/graphique et l'impact réel d'un travail en environnement informatique. Elle attire l'attention sur une variable que nous n'avons pas prise en compte.

A) GRAPHIQUES ET EQUATIONS : L'ARTICULATION DE DEUX REGISTRES

R. Duval (1988).

Dans cet article, l'auteur considère que la raison profonde des difficultés, identifiées par différentes recherches, qu'éprouvent les élèves lors des tâches de lecture et d'interprétation de représentations graphiques réside dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique. Il montre, à titre d'exemple, que dans le passage d'une courbe ou d'une droite à son expression algébrique, l'approche point par point, souvent favorisée dans l'enseignement, est non seulement inadéquate mais constitue un obstacle et il propose une description systématique des variables visuelles à prendre en compte dans la démarche d'interprétation globale.

Il identifie d'abord trois traitements hétérogènes des représentations graphiques et explicite ensuite les variables visuelles pertinentes correspondant aux caractéristiques significatives d'une écriture algébrique. Il illustre enfin la pertinence de son analyse par quelques résultats issus d'une enquête qu'il a menée.

a) Traitements hétérogènes des représentations graphiques :

Les trois traitements des représentations graphiques identifiés sont la démarche de pointage, la démarche d'extension du tracé et la démarche d'interprétation globale des propriétés figurales. La démarche d'extension correspond aux activités d'interpolation et d'extrapolation. Dans les deux premières démarches, selon l'auteur, on ne prend pas en compte les variables visuelles pertinentes de la représentation graphique et le traitement reste orienté vers la recherche de valeurs particulières sans que l'on ait à s'arrêter sur la forme de l'écriture algébrique. A propos de la troisième démarche, Duval écrit :

> "Avec cette démarche nous ne sommes plus en présence de l'association "un point - un couple de nombres", mais de l'association "variable visuelle de la représentation - unité significative de l'écriture algébrique".

b) Variables visuelles et caractéristiques significatives de l'expression algébrique:

En ce qui concerne les variables visuelles et les unités symboliques significatives, Duval écrit :

"La discrimination des unités significatives propres à une expression algébrique est relativement évidente. Il y a :

les symboles relationnels (<, >, =, ...)
les symboles d'opération ou de signe (+, -)
les symboles de variables
les symboles d'exposant, de coefficient et de constante."

et, parmi les caractéristiques figurales, il distingue deux variables générales et trois variables relatives aux cas où le graphique est un tracé simple (droite ou parabole).

"Les variables générales sont :
- l'implantation de la tâche, c-à-d. ce qui se détache comme figure sur fond : un trait ou une zone.
- la forme de la tâche : le trait tracé, qu'il délimite ou non une zone, est droit ou est courbe. S'il est courbe il est ouvert ou fermé."

L'analyse des 3 variables particulières[4] se résume dans le tableau suivant, limité au cas des droites qui ne sont pas parallèles à un des axes :

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques correspondantes	
– sens d'inclinaison :	trait montant trait descendant	coefficient >0 coefficient < 0	absence du symbole – présence du symbole –
– angles avec les axes :	partage symétrique angle *plus petit* angle *plus grand*	coefficient = 1 coefficient < 1 coefficient > 1	pas de coefficient écrit
– postion sur l'axe y :	coupe au dessus coupe au dessous coupe à l'origine	on ajoute une constante on soustrait une constante pas de correction additive	signe + signe –

Taleau 2-1.

[4] Dans notre expérimentation nous n'avons pas vraiment joué sur la variable "angles avec les axes" puisque nous nous somme limité (au collège) au cas de l'expression ax+b où a est un entier. Mais, le logiciel permet aussi de traiter le cas de l'expression (1/a) x +b où a est un entier non nul.

Les remarques faites par Duval sur ce tableau lui permettent d'affirmer que :

"Il n'y a pas congruence entre la direction de la droite dans le plan repéré et le coefficient qui détermine cette direction dans l'écriture de l'expression algébrique. Car dans toute valeur de coefficient donnée (2, 1/2, -2,..), il faut dégager deux propriétés distinctes, relativement à 0 et relativement à 1."

et un peu plus loin :

"A la différence de la démarche de pointage, ou même de celle d'extension représentative, la démarche d'interprétation exige que l'on centre son attention sur un ensemble de propriétés et non plus sur des valeurs particulières prises une à une."

Ensuite Duval propose une approche d'articulation entre représentation graphique et écriture algébrique. Il écrit :

"Une présentation explicite et systématique des variables visuelles significatives non seulement centre l'attention sur la correspondance entre représentation graphique et écriture algébrique, mais elle permet de trouver directement l'expression algébrique de propriétés géométriques : perpendicularité ou parallélisme de deux droites par exemple."

En ce qui concerne les variables générales, il se contente d'indiquer les correspondances suivantes :

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques corresp.
– implantation de la tache :	- zone	>,<,...
	- trait	=
– forme de la tache :	-trait droit	exposant de la variable = 1
	-trait courbe	exposant de la variable > 1

Tableau 2-2.

c) Enquête illustrative :

Cette enquête porte sur les difficultés, rencontrées par les élèves de seconde, dans la reconnaissance d'expressions algébriques, correspondant à des tracés, ou à des parties hachurées du plan. Les résultats de cette enquête permettent de donner une interprétation de certaines erreurs typiques identifiées par d'autres recherches.

L'expérience met en évidence des difficultés liées au manque de compétence au niveau de la discrimination des variables particulières et au niveau des variables générales.

- A propos des difficultés liées aux variables particulières, à l'exercice suivant :

"On désigne par x l'abscisse et par y l'ordonnée d'un point M du plan repéré. Indiquer à quelle expression algébrique (E1, E2, ... ou E10) chacune des droites D1,D2, ... D5 correspond."

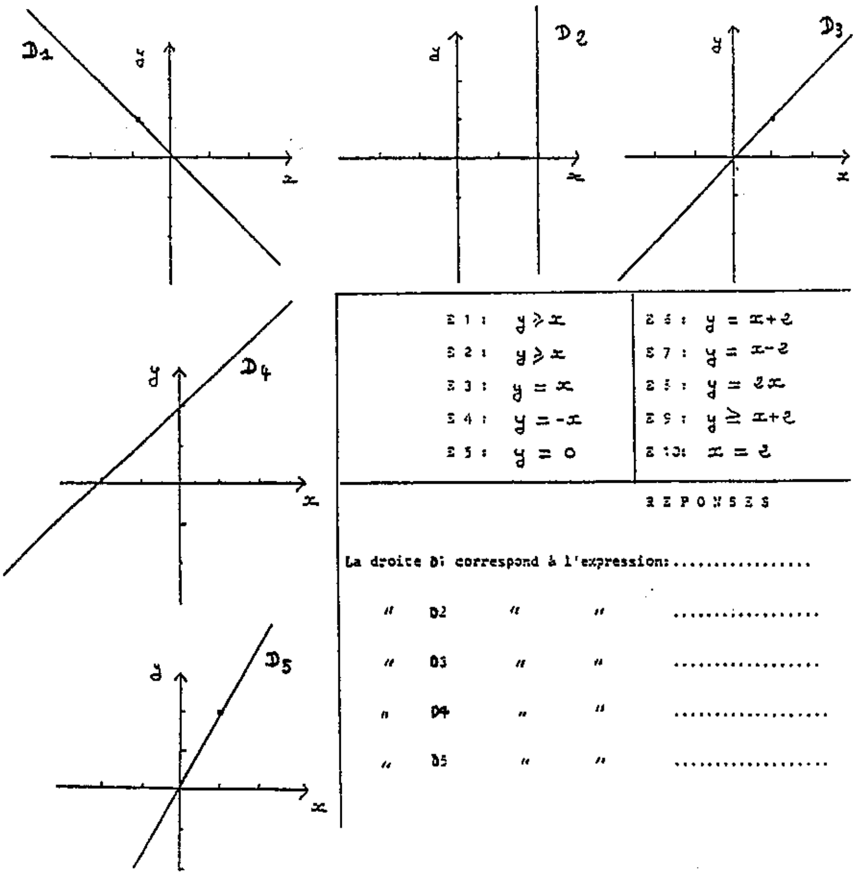


Figure 2-3.

moins d'un élève sur cinq réussit les 5 items et seulement 60% voient une différence de sens d'inclinaison de la droite associée à la différence entre y=x et y=- x.

- A propos des difficultés liées aux variables globales, aux tâches qui consistent à hachurer sur le plan repéré les ensembles définis verbalement ou à associer à chacune des cinq zones hachurées, une expression algébrique parmi $y=x$; $y>x$; $y<x$; $y=-x$; $xy>0$; $x>0$; $y<0$ ... , les pourcentages de réussite sont :

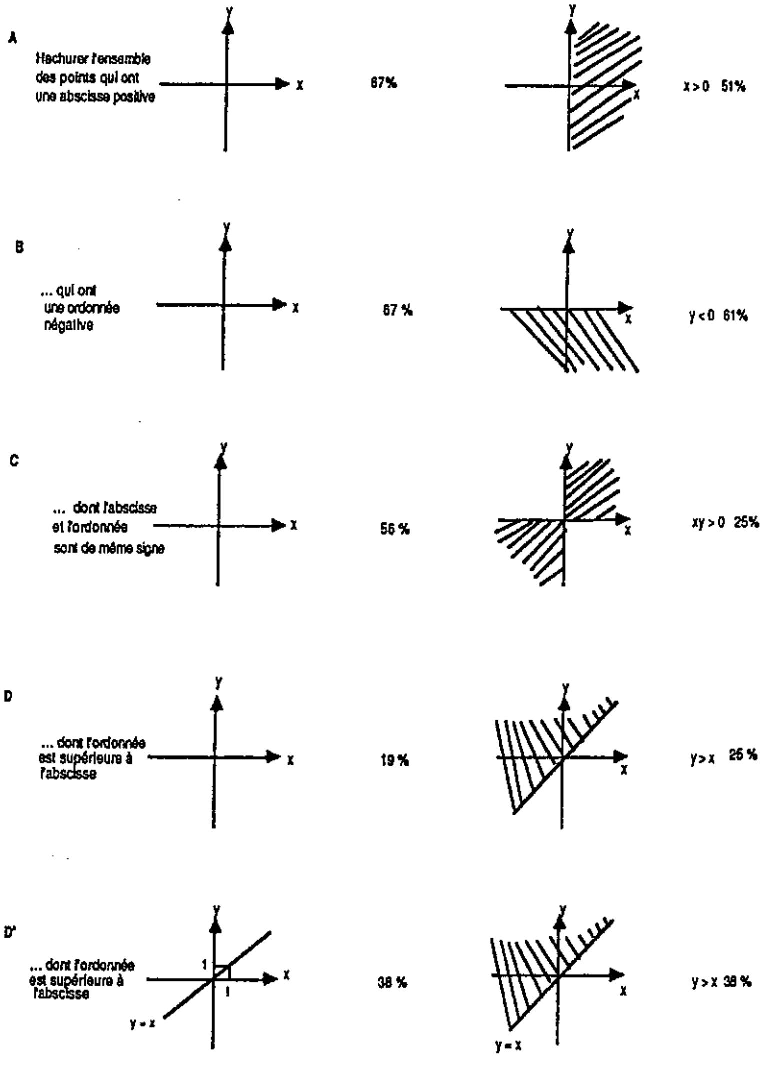


Figure 2-4.

Duval fait remarquer que, dans les cas A et B dans les deux tâches, il y a congruence sémantique entre les trois représentations : algébrique, discursive et graphique, et les réussites dans les quatre questions sont du même ordre de grandeur. Dans le cas de C, il y a congruence sémantique pour la première tâche mais pas du tout pour la seconde, le taux de réussite chute de moitié lorsqu'on passe de la première à la seconde. Il n'y a plus de congruence sémantique dans le cas de D et le taux de réussite est très bas mais lorsqu'on réduit la non congruence dans le cas de D' le taux de réussite double.

La conclusion que tire Duval est essentiellement orientée vers l'enseignement, comme en témoigne l'extrait suivant :

"Au vu des analyses précédentes, il apparaît qu'un apprentissage de la démarche d'interprétation globale ne peut pas faire l'économie d'une étude purement mathématique. Car c'est dans ce cadre que l'articulation entre valeurs de variables visuelles et propriétés conceptuelles relatives à ces valeurs peut être montrée pour elle-même. La signification des graphiques cartésiens, et par conséquent leur lecture, dépend de la perception de cette articulation. Lorsque le graphique représente des grandeurs hétérogènes, la démarche d'interprétation globale se double d'une interprétation des grandeurs en présence."

d) Commentaires :

La discrimination des variables visuelles significatives pertinentes engendre un problème annexe : celui des variables visuelles significatives non pertinentes. Dans le cas de droite et de l'expression $y = ax+b$, le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses, par exemple, joue un rôle "perturbateur" dans l'association variable visuelle / caractéristique de l'expression algébrique. En revanche, ce rôle devient un rôle clé dans la correspondance visuelle/algébrique lorsqu'il s'agit d'une équation de la forme $x/m+y/p=1$. Une situation analogue surgit dans le cas des expressions du second degré : les formes P2 ($y=A(x-P)^2+Q$) et P3 ($y=A(x-R)(x-S)$) ne sont pas associées aux mêmes variables visuelles significatives pertinentes et, dans le cas de P1 ($y = Ax^2+Bx+C$), il n'y a pas de congruence entre le signe de B (pourtant lié à l'abscisse du sommet) et la position du sommet sur l'axe des abscisses. On voit donc, comment l'analyse des congruences permet de rendre compte de la complexité des processus qui peuvent être mis en jeu dans l'apprentissage des relations entre registre algébrique et registre graphique. Cette analyse semble aussi permettre de désigner les savoirs du domaine de ces relations qui semblent "plus accessibles" par visualisation du graphique que d'autres. C'est aussi ce que nous avons essayé de faire en utilisant la notion de savoir atomique. Nous y reviendrons dans le chapitre IV et dans la partie I du chapitre V.
Ce problème peut aussi être lié au problème de changement de repère. Le travail de S. Nadot permet de mieux le préciser.
Soulignons enfin que l'approche de Duval a été adoptée par G. Chauvat et M. Pouget dans une étude des correspondances sémiotiques entre registre algébrique et registre graphique de représentation des fonctions du second degré (cf. [Chauvat et Pouget, 1992]).

B) <u>LE ROLE DES REPRESENTATIONS DANS L'APPROPRIATION DE LA NOTION DE FONCTION</u>

I. Guzman-Retamal (1990).

Faisant l'hypothèse que l'appropriation du concept de fonction est loin de résulter d'un apprentissage de la définition et qu'elle exige (préalablement) que l'articulation entre les registres graphique, algébrique et tableau (au moins) soit assurée, l'auteur présente les deux définitions du concept de fonction essentiellement adoptées dans l'enseignement[5] puis analyse la présentation, la définition du concept et les activités proposées dans différents manuels de Troisième, de Seconde et de Première. Elle analyse aussi certaines tâches internes aux trois registres cités plus haut et des tâches de traduction d'un registre à l'autre. Les performances des élèves de seconde à un questionnaire, posé en début d'année scolaire, montrent clairement que ces traductions sont alors loin d'être acquises et que les quelques réussites constatées aux différentes tâches apparaissent statistiquement indépendantes, voire opposées.

Nous allons présenter rapidement, les résultats les plus marquants des différentes analyses et de l'expérimentation concernant les deux registres algébrique et graphique.

a) Analyse a priori des tâches de "passage" entre registres :

Nous nous intéressons ici uniquement aux tâches de passage entre les deux registres algébrique et graphique.

1) Algébrique ----------> Graphique :

Construire la représentation graphique d'une fonction affine et d'une fonction affine par morceaux à partir d'une expression algébrique. Il s'agit d'interpréter les x et f(x) de la formule pour effectuer ensuite une démarche de pointage, en reprenant la terminologie introduite par R. Duval.

2) Graphique ----------> Algébrique :

Déterminer l'expression algébrique des fonctions étudiées - fonctions linéaire, constante, affine, affine par morceaux - étant donnée leur représentation graphique.

L'auteur remarque que :

> "Les tâches de passage Graphique vers l'Algébrique ainsi que celles du passage Tableaux vers l'Algébrique ont un degré de difficulté supérieur aux tâches des passages inverses. Cela pourrait être expliqué par le manque de travail sur les représentations des fonctions par des tableaux de valeurs et l'insuffisance du travail dans le registre graphique ce qui entraîne les difficultés des élèves pour réussir les tâches d'articulation. Par exemple, des tâches de passage Graphique vers l'Algébrique, qui permettent d'interpréter graphiquement les rôles des coefficients des formules par des démarches autres que celles de lecture directe ou de vérification aideront les élèves dans le travail d'articulation."

b) Analyse des manuels en Troisième :

Le concept de fonction n'est pas défini de façon générale et il ne s'agit que de fonctions affines. Trois manuels sont analysés[6]. Cette analyse est suivie d'une étude du programme de

---

[5]L'auteur considère que deux définitions sont à la base des définitions du concept de fonction dans les manuels. Ces deux définitions sont celles données par L. SCHWARTZ en 1959 dans son Cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique et par R. GODEMENT en 1963 dans son Cours d'algèbre, cours de mathématiques générales, à la Faculté des Sciences de Paris. Ces deux définitions sont des transpositions de la définition ensembliste donnée par BOURBAKI en 1939 dans sa Théorie des ensembles (Paragraphe 2, Fonctions).

[6]Ces manuels sont :

Troisième relativement aux registres. Nous nous contentons ici de présenter le bilan des tâches communes[7] proposées dans les exercices de type "pour s'entraîner" dans les trois manuels et des savoir faire mis en jeu ainsi que le tableau résumant l'analyse des tâches proposées par le programme.

Tâches proposées		Collection Transmath	Collection Such-Durrande	Nouvelle Collection Cedic	Savoir faire
Calculer à propos des Fonctions Affines	des images	20 / 69	4 / 52		Travail de calcul dans le Registre Algébrique
	des antécédents	6 / 69			
Reptésenter une Fonction Affine (dans le plan repéré)	A partir de la relation de correspondance	10 / 69		13 / 57	Passage (démarche de pointage) Relation de Correspondance → Graphique
	A partir de l'expression algébrique	7/ 69	14 / 52	14 / 57	Passage (démarche de pointage) Algébrique → Graphique
	et Lire des images	4 / 69		8 / 57	Lecture dans le Registre Graphique
	et Lire des antécédents	4 / 69			
Identifier une Fonction Affine	A partir de l'expression algébrique	7/ 69		4 / 57	Identification dans le Registre Algébrique
	A partir d'un grahique	4 / 69	4 / 52		Identification dans le Registre Graphique
Trouver une Fonction Affine	A partir de données algébriques	7 / 69		5 / 57	Travail d'interprétation dans le Registre Algébrique
	A partir d'un Tableau		4 / 52		Passage avec articulation Tableaux → Algébrique
	A partir d'un Graphique			3 / 57	Passage avec articulation Graphique → Algébrique
Interpréter un Enoncé	en langage naturel	5 / 6	1 / 4	2 / 3	Passage Enoncé → Algébrique
	accompagné d'un Tableau		2 / 4		
	accompagné d'un Graphique	1 / 6	1 / 4	1 / 3	

Tableau 2-3.

1) Maths 3ème, Collection Transmath, Nathan, Paris 1989
2) Mathématiques 3ème, Collection Such-Durrande, Bordas, Paris 1989
3) Faire des mathématiques 3ème, Nouvelle Collection, Cedic, Paris 1984

[7] D'autres tâches ne sont pas communes : la tâche "Identifier les coefficients étant données des égalités" figure dans 26 items sur 52 dans le 2ème manuel mais n'apparaît pas dans les deux autres et dans la Nouvelle Collection on rencontre des tâches absentes des deux autres.

Analyse des tâches proposées par le programme de Troisième

Passage	Démarche	Exemples de tâches	Tâches proposées par le programme
Algébrique → Graphique	Pointage	Construire une droite ou situer des points	b) g)
Graphique → Algébrique	Interprétation locale	Lire des coordonnées de points	h)
	Interprétation globale	Déterminer l'expression algébrique	c) ?
Algébrique → Tableaux	Substitution (calcul)	Construire un tableau	f)
Tableaux → Algébrique	Interprétation locale	Lire ou traduire des données	h)
	Interprétation globale	Déterminer l'expression algébrique	

Tableau 2-4.

les tâches proposées par les commentaires du programme de 1985 étant :

Paragraphe I. Travaux géométriques :
a) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :
- du sinus ou de la tangente d'un angle donné,
- de l'angle aigu de sinus ou de tangente donné.

b) Tracer une droite donnée par son équation ou son coefficient directeur et un point.
c) Déterminer l'équation d'une droite définie :
- par deux points,
- par son coefficient directeur et un point.

d) Savoir reconnaître ou exprimer à l'aide des coefficients directeurs le parallélisme de deux droites ou, en repère orthonormal leur orthogonalité.

Paragraphe III. Organisation et gestion de données, fonctions :
e) Déterminer une application affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.
f) Savoir construire un tableau de valeurs d'une fonction affine.
g) Représenter graphiquement une application affine et exploiter cette représentation.
h) Savoir lire et exploiter des données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences. Savoir calculer une moyenne.
e) Savoir traduire par une fonction une augmentation ou une diminution exprimée en pourcentage. Par exemple : savoir qu'une augmentation de 5%fait passer de la valeur x à la valeur 1,05 x.

c) Résultats de l'expérimentation :

L'expérimentation, menée à partir d'un questionnaire dans plusieurs classes de seconde, s'est déroulée en novembre et décembre alors que les fonctions n'avaient pas encore été traitées. Les élèves ne disposaient donc à ce moment que leurs connaissances de l'année précédente. Le questionnaire comporte des tâches d'identification de fonctions linéaires, affines, affines par morceaux ou constantes, données par leurs représentations graphiques, d'identification de l'ensemble de départ pour certaines d'entre elles. Il comporte aussi des tâches de passage direct entre registres (construire une droite à partir d'un tableau, trouver l'expression algébrique d'une fonction linéaire donnée par un tableau de valeurs) ainsi que des tâches d'articulation entre registres (calculer les valeurs prises par une fonction affine donnée par un tableau pour des nombres donnés, retrouver à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique ou d'une expression dans le langage naturel l'expression algébrique d'une fonction affine).

Deux faits, selon l'auteur, se dégagent de l'expérimentation :

"- les tâches qui n'exigent pas un passage entre registres sont relativement bien réussies, selon leur degré de complexité. Par exemple le taux de réussite aux tâches d'identification est dans le registre graphique de 50 %, dans le registre algébrique avoisine 60 %.

-- les tâches qui exigent le passage entre registres ont un taux de réussite nettement inférieur aux précédentes même lorsqu'il ne s'agit que d'une "traduction" directe. Par exemple, la tâche d'écrire l'expression algébrique d'une fonction linéaire, à partir de son tableau de valeurs. D'après nos résultats, le taux de réussite n'est plus que de 35 %. Si la fonction en question est affine, la question devient plus délicate : il faut une démarche d'interprétation globale, et les réponses correctes tombent à 15 %.

Le passage du registre graphique au registre algébrique ne fait pas de scores meilleurs. Trouver l'expression algébrique, étant donnée une droite de pente négative (parallèle à la deuxième bissectrice) et passant par l'origine, n'est réussi que par un quart des élèves ; l'expression algébrique d'une droite parallèle à la première bissectrice et qui coupe l'axe des y en un point donné est obtenue par 15%."

L'auteur conclut :

"Il y a donc un décalage important, entre les tâches qui se déroulent à l'intérieur d'un même registre et celles qui exigent le passage entre registres. Cela montre que les difficultés concernant les fonctions ne sont pas seulement et prioritairement d'ordre conceptuel. Elles commencent avec l'articulation de deux registres. Car dans certains cas, une démarche d'interprétation globale n'est pas suffisante.

Il faut une démarche d'interprétation globale qui prenne en compte les caractéristiques qualitatives de chaque registre. Il faut aussi avoir conscience des non congruences qui peuvent survenir entre deux représentations du même objet.

L'appropriation du concept de fonction exige préalablement que l'articulation entre les registres graphique, algébrique et tableaux (au moins) soit bien assurée. On peut même conjecturer qu'une amélioration importante dans les différents passages entre registres s'accompagnerait d'une réussite presque totale dans les tâches qui se situent à l'intérieur d'un même registre."

d) Commentaires :

Dans cette recherche qui traite de fonctions affines, l'analyse des tâches de passage entre registres a permis la mise en évidence de deux catégories de tâches : des tâches de passage direct et des tâches de passage nécessitant une articulation des deux registres mis en jeu. Dans le second cas, le passage du registre source Rs au registre destination Rd est en général coûteux et peut nécessiter des tâches internes Rs ------> Rs et Rd -------> Rd et des passages directs dans les deux sens entre Rs et Rd. L'analyse des manuels a montré que les tâches qui y sont proposées sont très rarement de la deuxième catégorie. Guzman montre, en particulier, le rôle de la démarche d'interprétation globale mettant en jeu les caractéristiques qualitatives des deux registres algébrique et graphique dans la conceptualisation de la notion de fonction.

Les résultats obtenus ici confirment les analyses faites par R. Duval citées plus haut. Mais, dans les deux cas on se limite à des fonctions du premier degré. Ils rejoignent aussi ceux obtenus au pré-test dans notre recherche, avec des élèves de première et terminale. Nous mettrons donc en évidence des difficultés analogues avec des élèves plus avancés pour des fonctions du second degré mais nous montrerons aussi par quels processus la situation peut évoluer rapidement et essaierons d'identifier quelques processus permettant une telle évolution.

C) REPRESENTATIONS GRAPHIQUES ET ETUDES DE FONCTIONS. LES PROBLEMES DIDACTIQUES ET COGNITIFS DU CHANGEMENT DE REPERE. UNE APPROCHE PAR LA PROGRAMMATION INFORMATIQUE D'UN TRACEUR DE COURBES.

S. Nadot, 1990.

Bien qu'elle traite essentiellement des problèmes liés à la notion de changement de repère, et ce de différents points de vue : cognitif, didactique, enseignement et apprentissage, cette recherche analyse de façon plus générale le signifiant graphique de la notion de fonction, étudie la place de la représentation graphique dans les manuels et rend compte des compétences d'élèves de Seconde à propos des représentations graphiques. Comme nous l'avons mentionné, cette recherche nous intéresse surtout par son analyse de l'enseignement et les problèmes complexes liés à la variable repère.

a) Le signifiant graphique :

Une synthèse des différentes recherches sur l'image scientifique, son rôle, ses limites et les difficultés associées au niveau de la compréhension est faite par l'auteur qui insiste sur le fait que si :

"- L'image scientifique peut fournir au discours didactique un outil efficace et nous mettons l'accent sur :
* l'aide à la conceptualisation, parce que l'image est un signifiant qui va à l'essentiel.
* l'aide à la signification des relations, l'organisation spatiale des traits en étant une bonne visualisation.
* l'aide à la mémorisation du fait de l'économie cognitive apportée.

* l'aide à la résolution de problèmes, la simulation y étant particulièrement aisée."

dans le même temps,

"- L'image scientifique nécessite un apprentissage particulier des codes, et nous entendons par apprentissage :

* la lecture et l'écriture des signes graphiques.
* la mise en relation des signes verbaux et des signes graphiques."

A propos de la représentation graphique d'une fonction, image scientifique particulière, l'auteur insiste sur certaines spécifités :

"La représentation graphique de la fonction crée une schématisation d'un objet qui n'a pas d'apparence physique. L'existence du concept de fonction est donné par les mots qui la définissent ou l'invariance des situations qu'elle recouvre ; dans ce cas le passage au dessin est un effort de réalisme, il va figurer, donner forme, donc aspect à ce qui n'était que définition ou formule, c'est le passage du degré 0 au degré 1. L'image mathématique est une image scientifique tout à fait originale : ni figurative, ni analogique, elle est liée uniquement à l'activité scientifique et didactique. M. ARTIGUE lui réserve le terme de visualisation."

b) L'analyse des manuels :

L'étude de 6 manuels de seconde[8] montre que :

1) le pourcentage entre le nombre d'exercices sur les représentations graphiques et ceux sur les fonctions varie entre 34 % et 86 % et en moyenne est de 61 %,

2) les pourcentages des exercices répondant à une intention donnée (parmi : codage et décodage traduction, vérification, conjecturation et résolution,désignées respectivement par cod, tra, vér, con et rés) à la totalité des exercices sur les représentations graphiques, sont donnés par le tableau 2-5, l'auteur ayant fait, au préalable, une discrimination des exercices sur les représentations graphiques selon que la représentation graphique est considérée comme objet d'étude ou outil intermédiaire pour d'autres traitements et selon les intentions d'emploi : traduction, vérification, conjecturation ou résolution.

Après cette étude l'auteur remarque que :

1) l'activité principale est incontestablement la construction du graphique (84 % en moyenne),
2) les activités élémentaires sur les graphiques représentent 11 % en moyenne,
3) parmi les raisons qui justifient l'emploi du graphique :

- le moyen de résoudre (15% en moyenne), mais uniquement pour les problèmes qui ne peuvent être résolus aisément par d'autres moyens : systèmes d'inéquations à deux inconnues avec équation non ordinaires par

[8] Ces manuels sont :
1) Mathématiques 2nde, Hautcoeur, BELIN, 1987.
2) Mathématiques classe de seconde, programme 1986,Collection LOUQUET, COLIN, 1986.
3) Mathématiques 2nde, Corrieu, DELAGRAVE, 1987.
4) Mathématiques Seconde, Collection DIMATHEME, DIDIER, 1985.
5) Mathématiques 2nde, Collection TERRACHER, HACHETTE, 1986.
6) Mathématiques 2nde, Collection TRANSMATH, NATHAN,1987.

exemple (dans les autres cas, le graphique n'est là que pour retrouver ou annoncer une information prouvée algébriquement),

- le moyen de créer des situations problématiques (16 % en moyenne).

	OBJET	OUTIL				
		Alg->Gra		Gra->Alg		Alg<->Gra
	Code	Traduit	Vérifie	Conject	Résoud	
BE	4%	96%	10%	17%	23%	26%
CO	2%	98%	1%	0%	6%	9%
DE	12%	81%	1%	1%	14%	15%
DI	23%	69%	6%	2%	15%	7%
HA	22%	61%	2%	7%	15%	25%
NA	9%	91%	1%	5%	20%	13%

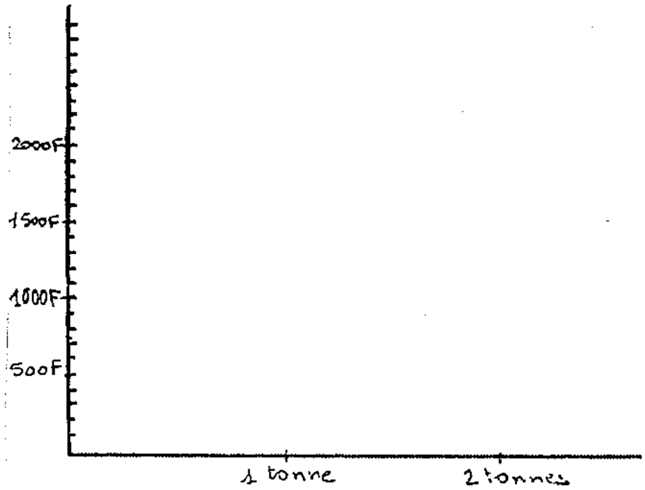
Tableau 2-5.

Une typologie des exercices selon qu'ils mettent en jeu des relations repère-courbe (la lfonction étant fixée), des relations fonction-repère (la courbe étant fixée) ou des relations fonction-courbe (le repère étant fixé) complète cette analyse. Chacun des exercices suivants appartient à une de ces trois catégories.

Exercice 1(catégorie fonction-courbe) : Une société pétrolifère peut acheter du pétrole en Europe au prix de 900 Francs la tonne ou à l'étranger au prix de 20 Dollars le baril. Si elle choisit d'acheter à l'étranger, où le pétrole est moins cher, elle doit verser, quelle que soit la quantité achetée une taxe de 60 Dollars. A partir de quelle quantité est il intéressant d'acheter à l'étranger ?

7 barils = 1tonne,
1 Dollar = 5 Francs.

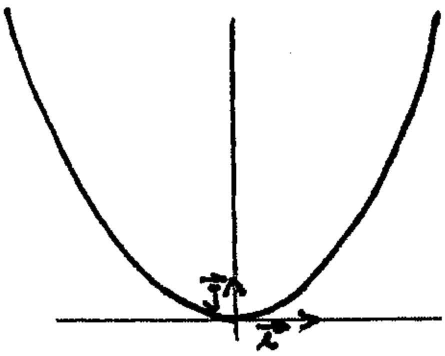
Vous pouver, si vous le désirez, utiliser une méthode graphique en représentant ci-contre le coût du pétrole européen, et celui du pétrole étranger.



Exercice 2 (catégorie repère-courbe) : Si vous disposiez d'une feuille grand format à petits carreaux pour placer les points dont les coordonnées figurent ci-dessous, comment choisiriez-vous les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$? (Il n'est pas demandé de placer les points)

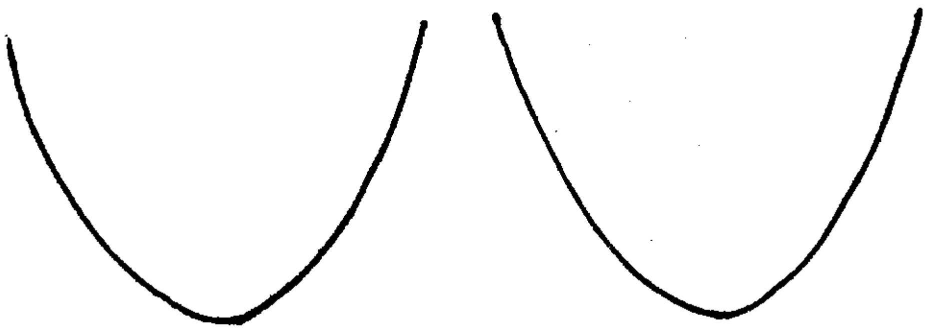
x	-67	-60	-52	-37	-30	-15	0	15	30	37	52	60	67
y	-0,7	1	0,7	0,7	1	0	1	0	1	0,7	0,7	1	-0,7

Exercice 3 (catégorie fonction-courbe) : Des élèves cherchent un exercice de mathématiques, ils viennent de tracer avec beaucoup de soin la courbe (ci-contre), en réponse à la question [1] (ci-dessous)



[1) Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2$]
[2) Reprendre cette question pour les fonctions g puis h telles que $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = (x-1)^2$]
lorsque, en lisant la question [2] (ci-dessus), un élève propose :
"pour avoir la courbe de g puis celle de h, il suffira de reproduire deux fois la courbe que l'on vient de faire au papier calque, il ne resterta plus qu'à placer le repère."

Que pensez-vous de cette proposition, est-elle mauvaise ? est-elle bonne ? Si vous la jugez mauvaise, alors dites pourquoi. Si vous la jugez bonne alors complétez les reproductions de l'élève.



Cette typologie conduit au tableau suivant :

	FONCTION COURBE	FONCTION REPERE	REPERE COURBE
BE	75%	25%	
CO	96%	4%	
DE	99%	1%	
DI	97%	3%	
HA	80%	20%	
NA	90%	9%	1%

Tableau 2-6.

Il atteste la domination des relations fonction-courbe et l'absence des relations repère-courbe.

A propos des compétences des élèves, les performances des élèves, sur certaines tâches, sont résumées par les tableaux 2-7, 2-8 et 2-9 aux pages suivantes[9] :

[9] Dans le tableau 2-7 :

- les classes concernées dans la partie au milieu du tableau, sont des classes "non scientifiques" et des classes "scientifiques",
-l'exercice dont il s'agit dans la partie en bas du tableau est l'exercice 1.

Dans le tableau 2-8 :

- la droite concernée par la partie en haut du tableau a pour équation : $y = 2x+1$
- dans la partie au milieu il s'agit de l'exercice 2.
- dans l'exercie dont il s'agit dans la partie en bas du tableau il faut dire quels sont les dessins qui sont susceptibles de représenter la fonction cos.

Dans le tableau 2-9 :

- dans l'exercice concerné par la partie en haut du tableau il s'agit de trouver les équations de la droite (OP) dans les repères $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, et $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{SP})$,
- l'exercice concerné par la partie en bas du tableau est l'exercice 3.

Catégorie FONCTION-COURBE

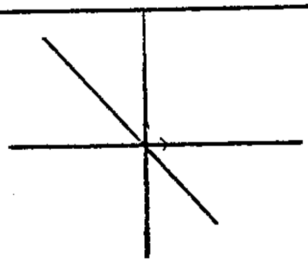
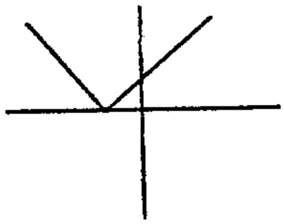
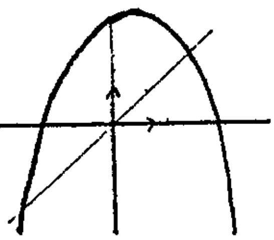
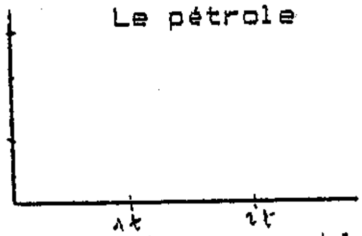
Graphique-Consignes	Résultats
 Associer équation et courbe	- Peu de non réponse 16% - Succés en lecture 88% - Succés en écriture 55%
  Tirer des informations sur la fonction à partir du graphique	- Les classes sont trés différentes en début d'année seulement. - Succés en fin d'année: lire une image 56% lire un antécédent 48% lire un intervalle 39%
Le pétrole  Résoudre un problème graphiquement	- Non réponse 22% - Réponse par l'arithmétique 41% le graphique 25% les deux 12%

Tableau 2-7.

Catégorie REPERE-COURBE

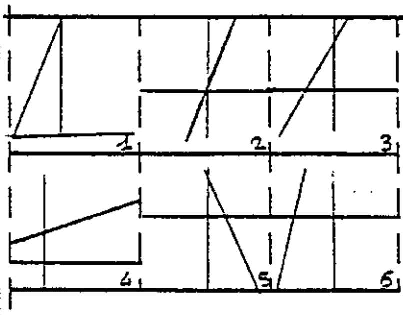
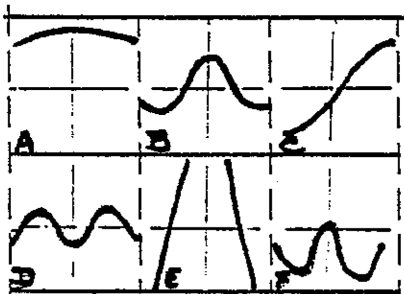
Graphique-Consignes	Résultats
 Retrouver les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$	- Importance des NR 49% - Succès cas 2: 87%(*) cas 5: 71%(*) cas 3: 68%(*) cas 4: 33%(*) cas 1: 23%(*) cas 6: 20%(*)
x | -67 --- 67 y | -0,7 --- -0,7 Choix des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour rester dans le cadre	- Nette différence entre début et fin d'année - Réussite début 23% fin 55% - Importance sur les taux de réussite de la formulation Echelle 88%(*) Unité 44%(*)
 Apprécier les chgts de courbe selon les différents repères	- Reconnaissance de B - A est envisagé - E est rejeté

Tableau 2-8.

Catégorie REPERE-FONCTION

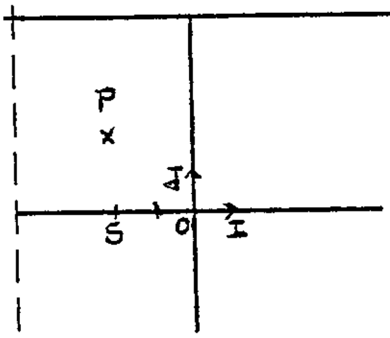
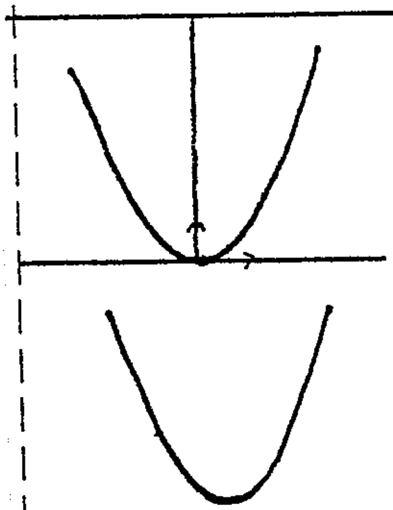
Graphique-Consignes	Résultats
 Pour une droite, déterminer selon les repères, ses équations	- Non réponses 28% - Succés Repère1: 58%(*) Repère2: 24%(*)
 Imaginer un repère ou une courbe représente une autre fonction	- Estime impossible 61% - Succés changement d'unités 25%(*) d'origine 56%(*)

Tableau 2-9.

c) Le problème de changement de repère :

Après cette phase de reconnaissance du signifiant graphique, l'auteur expérimente une approche didactique du problème du changement de repère basée sur l'activité de programmation. Cette expérimentation va mettre en évidence une difficulté cognitive liée particulièrement au changement de repère par déplacement d'origine et changement d'échelle. Dans le cas de l'axe des x, et précisément dans le cas du passage de l'échelle correspondant à l'intervalle [-a ; b] à l'échelle correspondant à l'intervalle [-a' ; b'] sur le même segment physique, des élèves utilisent différents schémas :

```
                 -80-------0-------80
      -160 --------------0------------- 159

          -40 ----0------------------------ 280
-160 --------------0------------- 159
          -40 ----0------------------------ 280
        -160 --------------0------------- 159
```

Figure 2-5.

S. Nadot écrit à ce propos :

"Le premier schéma ne pose pas de problème, il communique assez vite l'idée de la transformation.

Des deux schémas qui suivent, nous avons observé que le premier communiquait mieux l'idée de la transformation que le deuxième.

Les deux premiers schémas traduisent la réalité algébrique; ils peuvent aider à la construction de la transformation.

Si le dernier traduit bien la réalité physique de la superposition des repères; il ne permet pas de construire la transformation. En effet, il faut y lire en même temps le changement et la permanence. Cette opposition ne peut que créer un conflit au niveau des opérations de pensée."

d) Commentaires :

Dans cette recherche S. Nadot montre la prédominance du cadre algébrique ainsi que le quasi-monopole du passage algébrique ------> graphique dans les activités proposées dans les manuels. Elle montre aussi le rôle du changement de repère dans l'apprentissage des relations entre les deux cadres algébrique et graphique. Elle identifie certaines difficultés liées au problème du changement de repère, difficultés au niveau cognitif qui ne sont pas facilement surmontables dans un espace de temps court.

La complexité des relations mises en jeu dans le domaine de notre recherche, soulignée par Duval, n'est pas indépendante de la complexité conceptuelle liée au système graphique Fonction-Repère-Courbe qui a été soulignée par Nadot. Les relations dont il s'agit peuvent être regardées de différentes manières : repère fixe, fonction fixe ou courbe fixe. La difficulté cognitive liée au changement de repère, repérée par Nadot suggère donc que, dans le cadre de nos préoccupations, les situations à courbe fixe et à fonction fixe sont susceptibles de complexifier les articulations visées. Dans notre recherche nous n'évoquerons pas de situations de changement de repère. Nous n'utiliserons que de situations à repère fixe.

D) LEARNING. THE MICROGENETIC ANALYSIS OF ONE STUDENT'S EVOLVING UNDERSTANDING OF A COMPLEX SUBJECT MATTER DOMAIN.

A. Schoenfeld, J. Smith, A. Arcavi (1991).

Cette recherche étudie finement les changements dans les connaissances d'une élève - IN- de 16 ans alors qu'elle travaille pendant 7 heures sur 7 semaines dans un environnement informatique basé sur les relations droite - équation $y=mx+b$.

a) Le logiciel :

Le logiciel GRAPHER, utilisé comme environnement informatique, est composé de trois micro-mondes :

1) POINT GRAPHER dans lequel les élèves apprennent toutes les étapes de la construction point par point de fonctions comme $y = 2x + 5$ ou $y = x^2\sin(2x-1)$.
2) DYNAMIC GRAPHER dans lequel les élèves peuvent considérer les graphes de familles de fonctions comme $y = ax^2+bx+c$ et observer, lorsqu'ils font varier les paramètres des équations, les changements résultant dans les graphes correspondants.
3) BLACK BLOBS qui est une modification de GREEN GLOBS. L'élève, au début du jeu, voit apparaître sur l'écran des petits carreaux (blobs). Il "tire" une courbe en tapant son équation pour atteindre certains de ces blobs. L'équation est tracée et l'élève marque un score de $2^{n+1} - 1$ si le graphe passe par n blobs.

IN n'est pas seule face à l'ordinateur. Elle est accompagnée dans son travail par un enseignant, JS, membre du groupe de recherche, qui lui sert de guide vis-à-vis du logiciel et du domaine des fonctions et graphes. Ce n'est pas un tuteur. Son rôle est de faciliter la communication de IN avec la machine, d'éviter des blocages et de demander à IN des explications lorsque ceci s'avère nécessaire pour l'interprétation de ses actions. Les séances ont été filmées et enregistrées, le travail étant essentiellement effectué avec BLACK BLOBS.

b) Méthodologie et analyse du travail d'IN

L'analyse du travail d'IN, dans le but de comprendre l'état de ses connaissances tout au long des sept séances, a été basée sur la méthodologie suivante : les explications fournies pour un fait donné doivent être cohérentes, au niveaux local et global, avec les explications des faits antérieurs et postérieurs. Si plusieurs explications sont possibles pour un fait, elles sont comparées suivant ces critères d'examen cohérent du passé et du futur.

L'analyse fait intervenir 4 niveaux dans l'organisation de la structure cognitive de IN et son évolution (figure 2-6). Les auteurs pensent que ces niveaux sont présents dans l'organisation de toute structure cognitive :

1) le "schema level" : il s'agit d'un niveau macroscopique plutôt formel,
2) le niveau des entités conceptuelles sous-jacentes avec leurs propriétés familières,
3) "fine-grained knowledge structure" : niveau des atomes conceptuels à la base des propriétés et de leurs connexions.
4) "contextuel level" : les propriétés sont liées à certains contextes.

Les auteurs mentionnent que, pour le mathématicien, les trois premiers niveaux fonctionnent en interconnexion et que le 4ème n'existe pas.

Voici un résumé de l'analyse de la représentation, qualifiée par les auteurs "3-Slot Schema", de l'équation y = mx+b que faisait IN lorsqu'elle entre au laboratoire et l'évolution de cette représentation au cours du travail : pour trouver l'équation d'une droite, IN déclare dès le départ qu'elle doit trouver : la pente, le y-intercept et le x-intercept[7]. Le x-intercept va disparaître rapidement (le jeu ne le renforce pas) au niveau macro. Mais la question de la disparition définitive est laissée ouverte parce que, selon les auteurs, ce n'est que par la mise en place d'une connexion de ce niveau macro avec les niveaux inférieurs que peut s'obtenir une réelle stabilité.

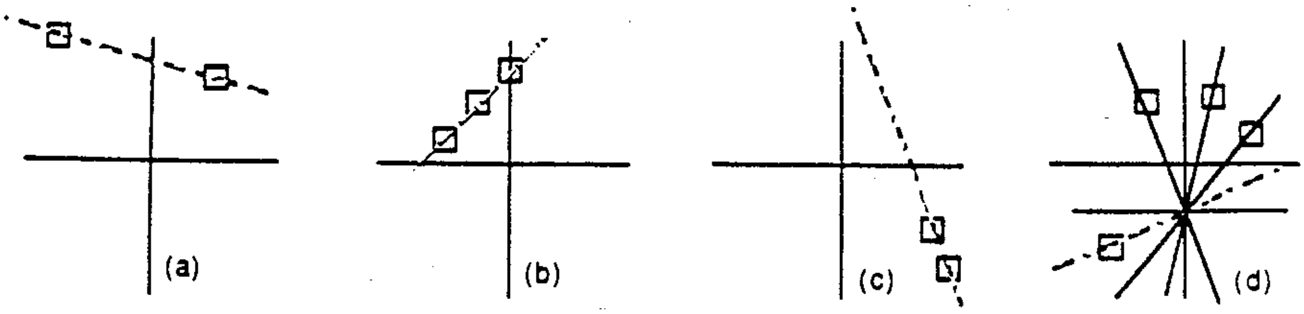
Sur l'évolution du y-intercept, les auteurs identifient 4 contextes (figure 2-7) qui ont indexé la notion du y-intercept. Dans chacun de ces contextes, IN associe des propriétés et procédures différentes au y-intercept. Selon les auteurs, IN débute avec une perception instable et non connectée des composantes statique/dynamique et graphique/algébrique du y-intercept. L'instabilité est manifeste suivant les contextes :

[7] Le y-intercept et le x-intercept sont respectivement l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec Oy et l'abscisse du point d'intersection de la droite avec Ox.

Graphs of Straight Lines:
Levels of Analysis and Structure

Levels:	Traditional view of subject matter	Our understanding of IN's knowledge structure
1 Macro-organization (schema level)	2-slot schema: L: $y = mx+b$ slope y-intercept	3-slot schema: L: $y = mx+b$ slope x-intercept y-intercept
2. Concepts (the entities that fill the slots at level 1) and their associated properties	m is the slope of L m>0: L rises large |m| · L steep (and more...) The point (o,b) is called the y- intercept of L...	m is the slope of L m>0: L falls large |m| . L flat... the x-intercept has a place in the equation and on the graph... the y-intercept has a place in the equation and on the graph..
3. Fine-grained knowledge structure: primitive elements and connections among them	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $y_2 - y_1$ and $x_2 - x_1$ are directed line segments, so their ratio indicates direction (e.g. + indicating "up, right") and steepness (so much y for so much x). when x=0 in $y = mx+b$, $y = 0x+b = b$, so the point (0,b) is (a) on the line, and (b) on the y-axis. Hence it is the y-intercept. [We call this level of structure the "Cartesian connection.]	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. but this knowledge is nominal and, while it is used to compute slope, the computation has no graphical entailments. not clear or stable IN knows that "b is the y-intercept," but her understanding is nominal and is not tied to the underlying structure as in the Cartesian connection.
4 Contextual level (Primitive elements are indexed by contexts)	Void. (In traditional analyses it is assumed that context-independent primitives are the nodes at level 3.)	m is neither stable across contexts nor consistently evoked. Its meanings evolve. The role of the x-intercept evolves over the sessions. In 4 slightly different contexts, IN uses 4 different procedures related to y-intercept -- ie. the properties of the y-intercept are context-dependent

Figure 2-6



Different game contexts for IN, in which she had different interpretations of y-intercept.

Figure 2-7.

1) Au départ le y-intercept est désigné comme le b dans l'équation y=mx+b.

2) En essayant de trouver b par le calcul, elle se met à résoudre l'équation 2=4x+1 et en déduit 2 comme valeur du y-intercept, puis elle en reconnaît une autre valeur dans le terme constant de l'équation : 1.

3) Devant la situation (figure 2-8) elle dit : "the y-intercept is where the point touches y... Oh!, Ok, so then, but then it could be either 3 point 5 or 2 point 5". C'est lorsque JS trace la droite et lui demande où cette droite touche l'axe des y qu'elle donne la valeur 3.

4) Un peu plus tard, devant la situation (figure 2-9), elle essaye 5,5 puis elle rectifie à 6 pour faire monter sa droite. On pourrait croire que le y-intercept est enfin maîtrisé.

5) Une semaine après, devant la situation (figure 2-10), elle se trompe dans le calcul de la pente et trouve -1,5 (au lieu de 1,5). Elle déclare alors que le y-intercept est 0. Incapable de trouver l'erreur, après un contrôle des calculs suggéré par JS, elle confirme que c'est 0 car P1 est sur l'axe. Ce n'est qu'après la demande de JS concernant les cordonnées de P1 que IN s'aperçoit que le y intercept est 7 et commente "Oh ! Je ne savais pas ça".

6) Un peu plus tard (figure 2-11) en essayant d'atteindre P4 et P5 et après calcul de la pente, elle se demande comment trouver le y-intercept. JS l'incite à deviner, elle donne une valeur plausible mais rencontre des difficultés en ce qui concerne la pente.

7) Après qu'elle a proposé plusieurs droites de la forme y = m x - 2 (figure 2-12), JS lui demande si elle peut faire une droite analogue pour atteindre P. IN semble gênée par le fait qu'elle n'a qu'un seul blob. Lorsque JS suggère de considérer le y-intercept comme un autre blob, elle surmonte le problème mais manifeste sa satisfaction et un certain étonnement lorsque le tir passe "exactement" par (0 ; -2). Il parait clairement que pour IN, le plan des blobs est différent du plan cartésien.

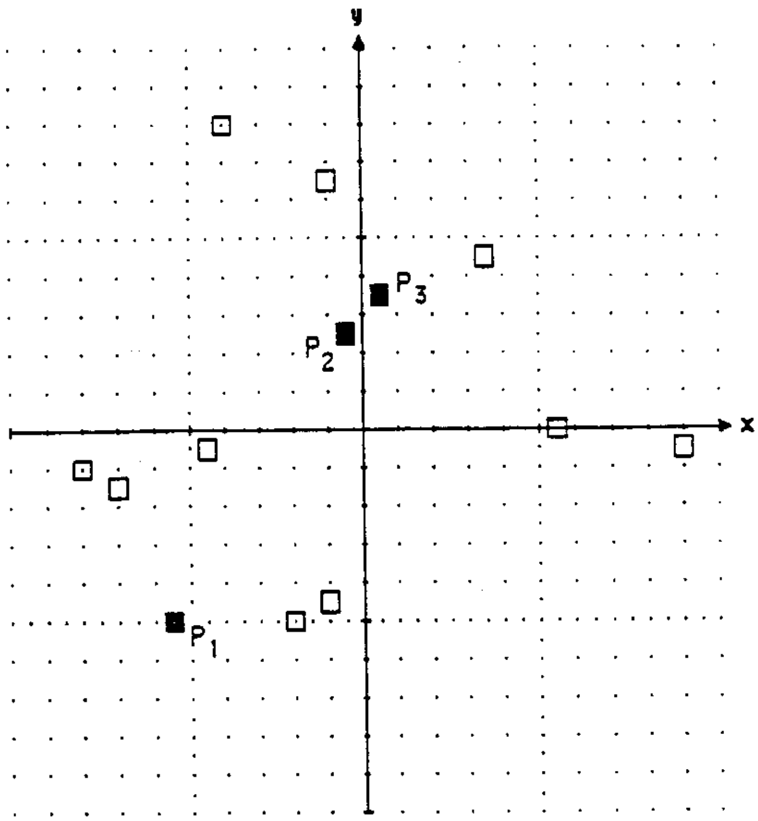


Figure 2-8.

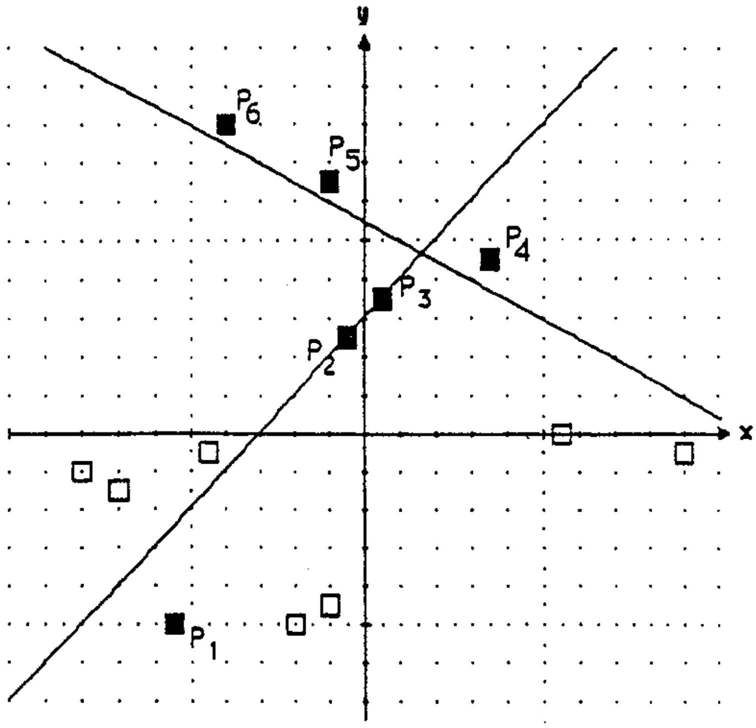


Figure 2-9.

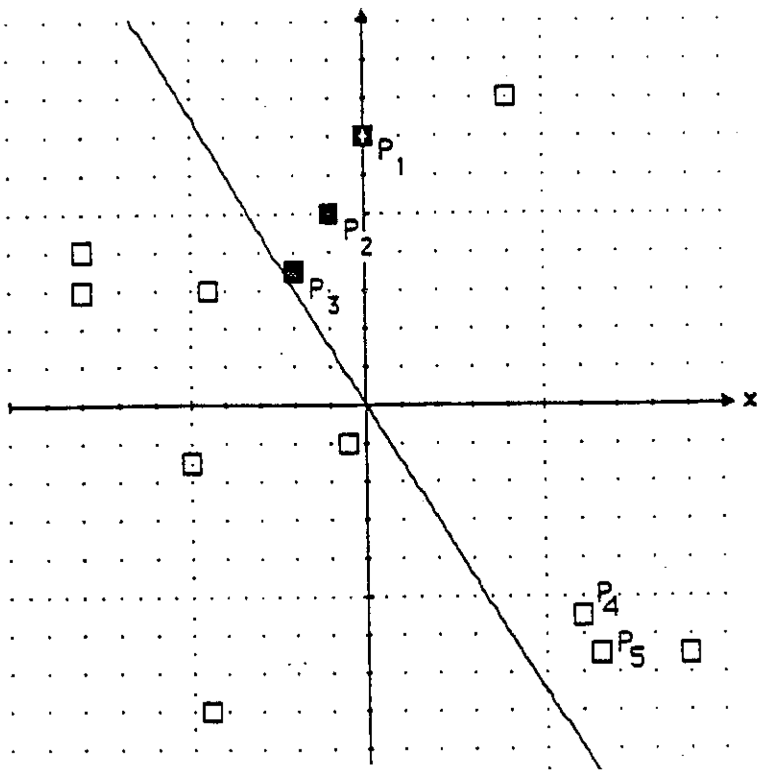


Figure 2-10.

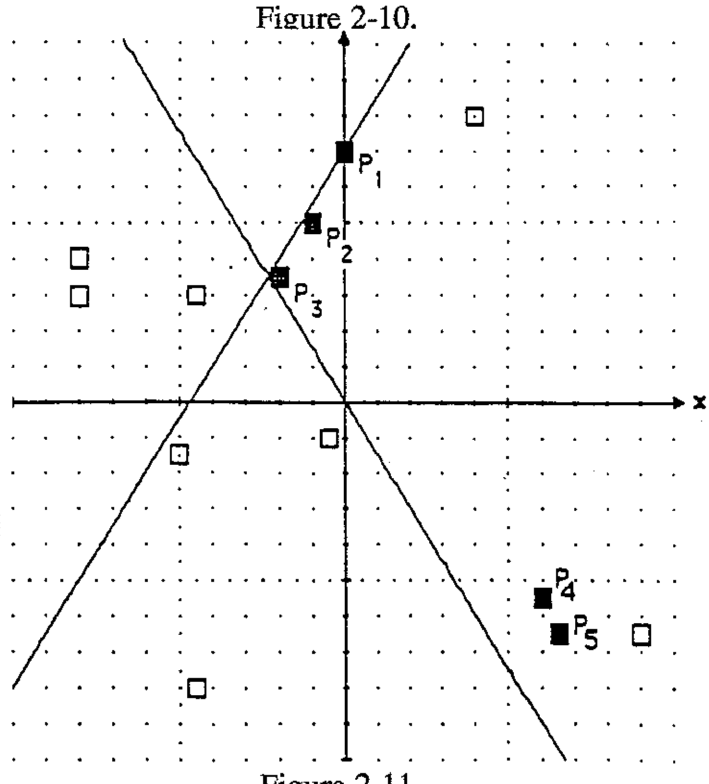


Figure 2-11.

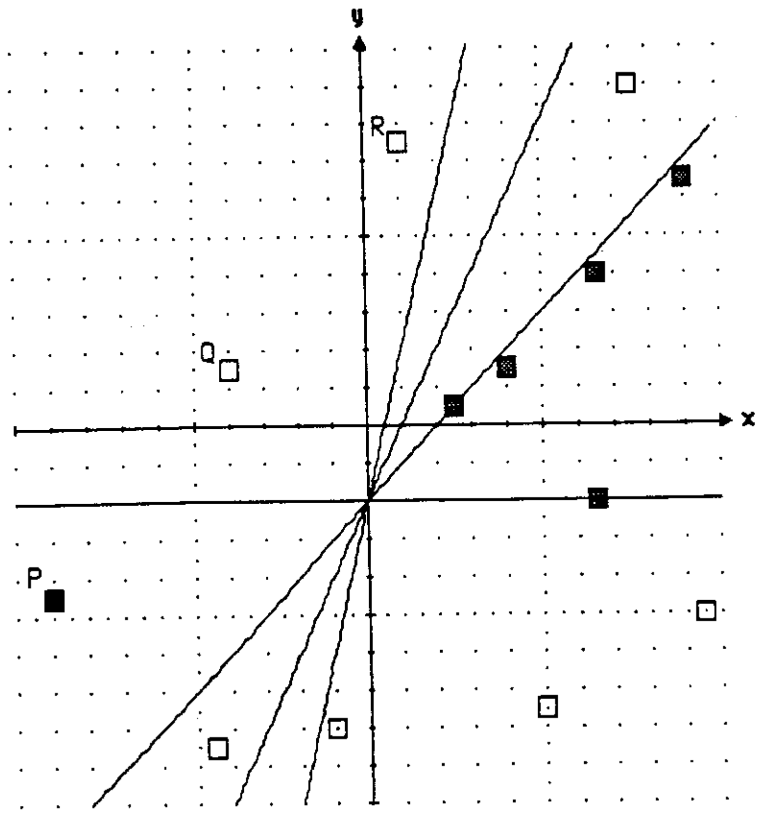


figure 2-12

La table suivante résume les différentes étapes dans évolution de IN de l'état initial à l'état final.

A Brief Tabular Summary of IN's Initial-to-Final Changes

Element	Initial State	Final State	Change (or Lack of)
3 Slot Schema	Slope, x-intercept, y-intercept are all necessary to make the graph of a line.	Slope and y-intercept are sufficient to make and control the graph of a line.	x-intercept weakened; slope and y-intercept strengthened Change was gradual, retrogressive.
Slope: Nature of "m"	Compute **m** from coordinates of 2 pts. The order of the points matters.	Compute **m** from coordinates of 2 pts. Order still matters. Estimate **m** visually: sign & magnitude accurate	(Formula still a "black box".) Alternative method of finding **m**. Growth of estimation skill was gradual.

Slope: Sign of "m"	Sign depends on the "origin" of the line: "negative" means *coming from the negative direction.*	Sign depends on rule: "positive slope means the line rises to the right."	Can correlate sign of m and orientation of graph. (No Cartesian connection) Location-dependent view weakened. Rule acquisition was overt. Underlying change was gradual.
Slope: Magnitude of m	Magnitude depends on the location of the graph.	Magnitude depends on the rule: "steeper means greater m." Slope function is not linear.	Can correlate $\|m\|$ with inclination of graph. (No basis for rule.) Location-dependent view weakened. Nature of slope function is unanswered question.
Slope: Extreme Cases	m=0 gives horizontal line. m undefined gives vertical line.	Same Same	No change.
Coordinate Schemes	Two competing schemes: one flawed, one correct.	Only correct scheme is used.	Flawed scheme is weakened. Correct scheme is strengthened.
Y-Intercept	Unstable state Highly context dependent	General concept: "where the graph crosses y-axis." Somewhat less context dependent.	Strengthen correct view. No Cartesian Connection. Limited application domain: blobs but not points.
Slope/Intercept Independence	Not independent. Changes in slope can change intercept.	Empirical Independence: changes in one do not affect the other.	Change is gradual.

Tableau 2-10

Au delà du cas cité, cette recherche montre la complexité des phénomènes cognitifs liés à la mise en place des nouvelles conceptions et surtout le conflit existant entre des conceptions transitionnelles et les anciennes conceptions. Ce conflit explique, selon les auteurs, l'instabilité des connaissances en cours de formation et la lenteur avec laquelle se fait l'évolution.

c) Commentaires

Cette recherche, comme nous l'avons mentionné, s'intéresse comme la nôtre aux processus d'apprentissage dans un environnement informatique des relations entre cadre graphique et cadre algébrique. En dépit de données de natures différentes, on note des similarités méthodologiques : dans les deux recherches, l'analyse fine sert à émettre des hypothèses locales, puis on recherche des cohérences plus globales permettant de trier ces hypothèses locales et de se faire une image de la dynamique d'évolution des élèves. Elle diffère cependant de la nôtre par le domaine des relations visé, le nombre des sujets concernés, les observables recueillis et les outils d'analyse utilisés. En effet :

1) Elle étudie, par analyse microscopique, l'évolution d'un seul élève dans des tâches mettant en jeu l'articulation à propos des droites. Nous étudions le fonctionnement d'une cinquantaine d'élèves avec des droites et des paraboles, en comparant des situations différentes par rapport à l'enseignement officiel. Nous conjugons de plus des méthodes d'analyse statistique globale et des méthodes d'analyse microscopique de certains travaux typiques, les méthodes d'analyse globale étant utilisées, dans un premier temps, pour identifier certains comportements principaux et cerner leurs liens à des facteurs de progression.

2) Elle exploite des informations recueillies à partir de la bande vidéo du travail de l'élève et des explications fournies aux questions de J.S., alors que dans notre recherche nous recourons essentiellement aux enregistrements automatiques des interactions élève/machine effectués en cours de séance.

3) Elle s'intéresse surtout à l'évolution des connaissances d'IN d'une façon verticale (d'un niveau à un autre), tandis que dans notre recherche les outils d'analyse utilisés concernent essentiellement le niveau 3.

Cette recherche montre aussi comment le contexte social influence la situation didactique : les suggestions implicites ou explicites de JS sont, par exemple, à plusieurs reprises acceptées par IN sans réelle conviction. Notre recherche où les élèves travaillent seuls face à l'ordinateur ne permet pas ce type d'étude.

Après cette présentation de logiciels et recherches par rapport auxquels nous avons essayé de situer notre propre travail, nous allons présenter dans le chapitre suivant le logiciel que nous avons réalisé pour cette recherche.

CHAPITRE III

LE LOGICIEL

LE LOGICIEL

I) INTRODUCTION

Ce chapitre concerne la conception et la réalisation du logiciel utilisé dans notre recherche.

En ce qui concerne la conception : nous présenterons tout d'abord les principes généraux qui ont guidé cette conception, ensuite nous détaillerons le "cahier de charges" du logiciel, en reliant les composantes de ce cahier à l'étude bibliographique développée au chapitre précédent, et en précisant les variables (didactiques ou supposées didactiques) prises en compte.

En ce qui concerne la réalisation, nous évoquerons les contraintes qui nous étaient imposées par le matériel choisi pour l'implémentation du logiciel, puis nous indiquerons les choix didactiques retenus dans la version "recherche" réalisée. Enfin nous donnerons une description détaillée du produit illustrée par des "copies d'écran".

Signalons que le "cahier des charges" tel qu'il est décrit ci-après n'est pas le "cahier de charges initial". En réalité ce cahier s'est mis progressivement en place. Une première version du logiciel, qui constitue son noyau, a d'abord été implémentée sur P.C. et elle a été testée en menant un certain nombre d'expérimentations informelles. Ce choix nous ayant paru, dans la suite, limiter les possibilités d'expérimentation en particulier au niveau collège du fait de l'équipement dominant à l'époque : les systèmes nanoréseaux, une seconde version au cahier de charges modifié en fonction des résultats des premiers essais, a été réalisée sur nanoréseau. C'est cette version qui a été utilisée pour les expérimentations décrites dans les chapitres V et VI.

Enfin, à l'issue des expérimentations, une dernière version a été réalisée en C++ pour P. C. Cette version fonctionne sous environnement Windows et élargit le champ des types de fonctions accessibles et des options ouvertes à l'enseignant. Elle intègre de plus un module d'analyse automatique du fonctionnement de l'élève en cours de la séance exploitant les critères utilisés dans la recherche. Elle sera présentée en annexe.

II) CONCEPTION

II-1) PRINCIPES GENERAUX

- Comme nous l'avons annoncé dans notre problématique, notre recherche est basée sur l'étude expérimentale du fonctionnement d'élèves face à un logiciel précis, et elle a l'ambition de permettre la réalisation d'un produit d'enseignement intégrant certains des résultats du travail expérimental. A nos yeux, le logiciel construit doit donc être un outil de recherche dont on doit pouvoir dériver sans changements structurels profonds un produit d'enseignement évolutif et ouvert.

- Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, les nombreuses recherches menées à propos de la notion de fonction ont mis en évidence la difficulté cognitive de l'articulation entre les registres algébrique et graphique, registres symboliques dominants et l'inadéquation de l'enseignement usuel à l'apprentissage de cette articulation.

- Partant de l'hypothèse que les possibilités graphiques et dynamiques de l'ordinateur peuvent aider à pallier les insuffisances de l'enseignement usuel dans ce domaine, nous avons donc voulu construire un logiciel centré sur l'articulation des deux registres.

- Les recherches ayant par ailleurs montré la forte domination dans l'enseignement du passage de l'algébrique vers le graphique associé à des tâches ne nécessitant qu'une approche ponctuelle du graphique et les inconvénients d'une telle domination, nous avons choisi de construire un logiciel fonctionnant prioritairement du graphique vers l'algébrique et favorisant une approche globale du graphique.

Notre logiciel est donc destiné à constituer une aide à la conceptualisation de la notion de fonction centrée sur l'interaction des cadres algébrique et graphique .

Le logiciel doit fonctionner prioritairement dans le sens du graphique vers l'algébrique.[1]

II-2) CAHIER DE CHARGES

Nous préciserons dans cette partie les caractéristiques principales du cahier de charges du logiciel en considérant successivement les rubriques suivantes :

a) type du logiciel,
b) type de tâches que le logiciel va proposer à l'élève,
c) type de fonctions qui seront traitées par le logiciel,
d) type d'expressions algébriques des fonctions utilisé par le logiciel,
e) type du fonctionnement prévu du logiciel,
f) équilibre graphique/algébrique,
g) autres caractéristiques du logiciel.

a) TYPE DU LOGICIEL

L'un des objectifs de la recherche est, rappelons-le, d'étudier le fonctionnement d'élèves et le degré de leur engagement mathématique face à un jeu mathématique informatique. Le logiciel doit donc être de type jeu et l'on doit trouver, comme dans tout jeu, un enjeu, des règles du jeu, des effets visuels et sonores, différentes manières possibles de mener le jeu, des stratégies perdantes et des stratégies gagnantes.

[1]Les données initiales sont dans le cadre graphique et la réponse est fournie dans le cadre algébrique mais cela ne signifie bien sûr pas, et l'analyse des protocoles le montre, que le travail sollicité est à sens unique du graphique vers l'algébrique.

b) TYPE DE TACHES

La maîtrise de certaines tâches d'articulation entre registres d'expression d'une fonction semble, au vu des recherches (cf. chapitre précédent), un élément nécessaire à l'appropriation du concept.

Le logiciel doit permettre de mettre en oeuvre de telles tâches d'articulation et de proposer des tâches suffisamment "simples" pour pouvoir être abordables dès le début de l'enseignement sur les fonctions. Il nous semble que le type de jeu choisi dans le logiciel est susceptible de remplir ces conditions, la tâche étant la suivante :

Une fonction étant donnée par sa représentation graphique dans un repère orthogonal, en trouver une expression algébrique sous une forme a priori déterminée.

c) TYPE DE FONCTIONS

Le logiciel doit traiter les familles de fonctions les plus usuelles de l'enseignement secondaire. Cette variété doit être en particulier suffisante pour pouvoir étudier dans une recherche l'effet de l'adaptation au jeu avec un type de fonctions sur le jeu avec un autre type. Il faut, dans ces conditions, autoriser des fonctions dépendant de plus de deux paramètres. Pour ne pas compliquer inutilement la question, le nombre de paramètres est dans le logiciel limité à quatre. Ces familles sont choisies, outre leur place dans les programmes de l'enseignement secondaire, pour la richesse des effets graphiques liés aux changements de leurs paramètres.

d) TYPE D'EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

La forme de l'expression algébrique d'une fonction f utilisée dans le logiciel est la forme cartésienne $y=f(x)$. Mais pour une famille de fonctions de type donné f, l'image f(x) d'un réel x peut prendre plusieurs expressions algébriques équivalentes sur le plan mathématique mais non équivalentes sur le plan de l'articulation des registres graphique et algébrique. Il est souhaitable que le logiciel intègre cette diversité de représentations et d'articulations et permette d'étudier par exemple leurs coûts cognitifs respectifs.

e) TYPE DE FONCTIONNEMENT PREVU

Pour la version recherche, le logiciel doit enregistrer automatiquement toutes les actions de l'élève. Il doit aussi permettre de déterminer des traitements automatiques de ces enregistrements permettant un feed-back pertinent en temps réel pour l'enseignant et l'élève.

Pour la version enseignement, le logiciel doit pouvoir fonctionner de façon souple sous la forme jeu. Il doit pouvoir aussi être piloté par l'enseignant :

- pour construire une séquence d'enseignement aidant à construire l'articulation algébrique/graphique collectivement ou en petits groupes.
- pour proposer des activités autonomes de soutien, renforcement et évaluation.

f) EQUILIBRE ENTRE CADRE ALGEBRIQUE ET CADRE GRAPHIQUE

Les recherches l'ont bien montré : la représentation algébrique étant privilégiée par l'enseignement, les compétences des élèves sur les tâches de passage entre les deux registres algébrique et graphique sont faibles. Le logiciel doit en permanence mettre en parallèle les deux cadres algébrique et graphique et favoriser leur articulation.

Chaque fois que l'élève fournit une expression algébrique, le logiciel doit donc tracer la représentation graphique correspondante.

g) AUTRES CARACTERISTIQUES DU LOGICIEL

Le logiciel est destiné à être utilisé éventuellement par les élèves d'une façon autonome. Il doit être convivial. Comme il s'agit d'un logiciel d'utilisation relativement ponctuelle, le temps de familiarisation avec le fonctionnement doit être particulièrement court. En d'autres termes, son mode d'utilisation doit être suffisamment simple ne pas nécessiter de séances d'apprentissage. En particulier les indications nécessaires à son utilisation doivent pouvoir contenir sur une fiche explicative courte fournie à l'élève lors de la session de travail.

II-3)DESCRIPTION

a) STRUCTURE DU LOGICIEL

En fonction des exigences du cahier de charges, le logiciel a été constitué à partir de trois modules : le module "Dialogue", le module "Jeu" et le module "Analyse".

1) Le module "Dialogue" est le module qui assure l'interaction entre l'enseignant et le module "Jeu". Il permet d'adapter le logiciel au type de situation didactique souhaitée en jouant sur certaines variables.

2) Le module "Jeu" est le module qui gère le jeu et qui assure l'interaction avec l'élève.

3) Le module "Analyse" est le module chargé d'exploiter les résultats de la recherche pour analyser les données enregistrées et leur appliquer un traitement adéquat. Ce module permet de fournir, en temps réel, un feed-back sur les activités de l'élève à partir des informations recueillies par le module "Jeu".

b) DESCRIPTION DU LOGICIEL

Le logiciel trace à l'écran la représentation graphique d'une fonction, et demande à l'élève d'en trouver une expression algébrique sous une forme prédéterminée[2]. L'élève possède un capital de points ou de coups.

---

[2]Pour certaines familles (trigonométrique ou hyperbolique par exemple), plusieurs expressions peuvent convenir. Le logiciel reconnait leurs équivalences.

Le logiciel met à la disposition de l'élève diverses aides pour trouver la réponse : un moyen d'inspection ponctuelle du tracé par affichage des coordonnées de points de ce tracé, et un moyen d'inspection globale du tracé par d'autres tracés. Chaque réponse erronée est pénalisée au niveau du capital. De même, chaque recours à une aide entraîne la perte du nombre de points correspondant à son coût d'utilisation dans le cas d'un capital de points, à un coup dans le cas d'un capital de coups.

Une fois que le capital accordé à l'élève est épuisé, l'élève peut encore proposer une réponse. Si celle-ci n'est pas correcte, le logiciel affiche la réponse correcte.

c) VARIABLES DIDACTIQUES DU LOGICIEL

Le logiciel doit pouvoir fonctionner dans plusieurs contextes dans le cadre de la recherche. Il doit pouvoir tourner sous différentes situations dans l'enseignement. Il doit permettre, aussi bien dans la version recherche que dans la version enseignement, de construire des situations didactiques, pilotables par certaines variables didactiques [Brousseau, 1986]. Il ne doit donc pas être figé mais au contraire largement paramétrable et pouvoir prendre en compte certaines variables didactiques ou supposées didactiques.

Dans la version didactifiée pour l'enseignement, la gestion de ces variables se fait à l'aide du module "Dialogue".

Dans ce qui suit nous allons préciser ces variables, expliquer succinctement les raisons de leur introduction, et envisager leurs valeurs possibles. Nous envisagerons successivement la variable "Repère", les variables "Fonction", les variables "Jeu", et les variables "Outil". On pourra se faire une idée plus précise de leur fonctionnement à la lecture du paragraphe IV de ce chapitre.

c-1) Variable "Repère"

Les éléments de l'articulation entre registre algébrique et registre graphique de représentation sont définies par le système fonction-repère-courbe. Une classification de ces relations conduit aux trois classes de relations : à fonction fixe, à repère fixe, et à courbe fixe. S. Nadot [Nadot, 1990] a mis en évidence la complexité des problèmes cognitifs liés au changement de repère qui peuvent intervenir dans des situations à fonction fixe ou à courbe fixe. Dans ce logiciel, visant les articulations les plus simples, nous nous limitons aux relations fonction-repère et fonction-courbe. L'aspect graphique d'une fonction dépend du choix du constituant repère du système graphique. Le type du repère est donc une variable didactique.

Encore une fois, pour limiter la complexité et favoriser le transfert à l'environnement usuel, nous avons choisi de préserver dans notre logiciel une situation fréquemment rencontrée par les élèves dans les tâches graphiques avec papier/crayon. Il s'agit de l'utilisation d'un repère orthonormé dont l'origine est au centre du cadre matériel représentant le plan. En ce qui concerne l'unité, il nous semble que la valeur d'environ 0,5 cm permet d'une part, de rendre pratiquement possible, sans besoin de recourir à des mesures, la lecture graphique des coordonnées entières des points, d'autre part, de pouvoir représenter sur notre écran la partie de la représentation graphique dont les points ont des coordonnées entre -15 et 15, valeurs qui sont en général les valeurs que rencontrent les élèves dans les activités papier/crayon portant sur les représentations graphiques au début d'un enseignement sur les fonctions. Dans le cas de certaines fonctions (trigonométriques par exemple), il est plus significatif de prendre une autre valeur pour l'unité et des choix différents ont été faits[3].

Pour respecter la représentation graphique "usuelle" des fonctions et pour assurer la lisibilité à l'écran, nous avons donc donné à la variable "Repère" deux valeurs possibles : "traditionnel" (repère orthonormal centré avec une unité 0,5 cm) indépendamment du type de la fonction, et "imposé par le type de fonction" (repère orthonormal centré et longueur de l'unité dépendant du type de fonction).

Dans le logiciel la valeur par défaut est : "imposé par type".

c-2) **Variables "Fonction"**

Cette catégorie regroupe plusieurs variables.

- Variable "Type de fonction"

Les types de fonctions que doit traiter le logiciel doivent :

- figurer dans les programmes de l'enseignement secondaire,
- contenir les fonctions usuelles rencontrées au début d'un enseignement sur les fonctions,
- posséder des caractéristiques graphiques directement interprétables dans le registre algébrique (points d'intersection avec les axes, points remarquables, éléments de symétrie, sens de variation, existence d'asymptotes verticales, horizontales et obliques).

C'est pourquoi dans notre logiciel, la variable Type de fonction peut prendre 6 valeurs : "premier degré", "second degré", "homographique", "trigonométrique", "logarithmique" et "exponentielle".

- Variable "Choix du type de fonction"

Le logiciel accepte plusieurs types de fonctions. Les relations entre les deux registres algébrique et graphique mises en jeu par ces types ne sont pas les mêmes. L'enjeu didactique du logiciel est donc affecté par le choix du type ou des types de fonction utilisés dans une session. Ce choix constitue donc une variable didactique. Cette variable peut prendre dans notre logiciel, les valeurs suivantes : "libre sur toute la séance" (le choix est fait par l'élève), "au hasard sur toute la séance" (le choix est fait automatiquement part le logiciel), "imposée sur toute la séance" (le choix est fait par l'enseignant), "libre par exercice", "au hasard par exercice".

- Variable "Forme algébrique"

A chaque type de fonction correspondent en général plusieurs formes algébriques. R. Duval (cf. chapitre précédent) a mis en évidence de nombreux phénomènes de non-congruence entre représentation algébrique et représentation graphique d'une fonction qui dépendent bien sûr du type choisi pour l'expression algébrique de la fonction et les difficultés engendrées par ces non-congruences dans l'articulation entre cadre algébrique et cadre graphique. Les différentes expressions algébriques d'une fonction ne sont donc pas

---

[3] multiples de $\pi/4$ ou $\pi/6$.

didactiquement équivalentes par rapport aux relations qu'elles mettent en jeu entre le cadre algébrique et le cadre graphique. La forme algébrique est donc une variable didactique.

Cette variable, comme la variable Type de fonction, n'est pas libre dans le logiciel. Elle est fixée à la valeur suivante :

au type fonction du premier degré correspondent les formes $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax$ et $f(x)=b$, au type fonction du second degré correspondent les trois formes $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=a(x-p)^2+q$ et $f(x)=a(x-r)(x-s)$, au type de fonction homographique correspondent les formes $f(x)=a/x$, $f(x)=a/(x+d)$, $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$, au type fonction trigonométrique correspondent les formes $f(x)=\sin(bx)$, $f(x)=\sin(bx+c)$ et $f(x)=a\sin(bx+c)$, enfin pour les fonctions logarithmiques et exponentielles nous nous sommes restreints aux formes $f(x)=\ln(ax+b)$ et $f(x)=a+\exp(x/b)$ parce que, tout en garantissant une représentation nette dans les conditions de nos choix de repère d'unité et de coefficients, elles permettent d'aborder l'essentiel des associations visées.

- Variable "Choix de la forme algébrique"

Comme dans le cas du choix du type, la façon dont peut se faire ce choix dans le logiciel influence le type des relations mises en jeu par le logiciel au cours d'une séance.

Comme la variable choix du type, cette variable peut avoir les valeurs suivantes : "libre sur toute la séance" (choix par l'élève), "au hasard sur toute la séance" (choix automatique par le logiciel), "imposée sur toute la séance" (choix fait par l'enseignant), "libre par exercice" et "au hasard par exercice".

- Variable "Type des coefficients"

Pour un type de fonction donné, sous une forme algébrique donnée, le type des coefficients affecte l'aspect graphique de la fonction et donc les caractéristiques didactiques de la situation. Le type des coefficients est donc lui aussi une variable.

Dans le cadre graphique, cette variable, comme la variable repère, joue sur le caractère "puissance informative" de la représentation graphique de la fonction concernant les caractéristiques mentionnées plus haut. Certaines de ces caractéristiques dans le cas des classes de fonctions prises en compte par le logiciel sont interprétables directement par les valeurs de certains coefficients (les valeurs de certains coefficients sont par exemple les coordonnées de certains points). Dans le cas où les coefficients sont des entiers, il est possible de les lire graphiquement, ce qui facilite la recherche des autres coefficients.

Pour les fonctions utilisées dans le module "Jeu" qui seront données par leurs représentations graphiques et dont on demande les formes algébriques - pour ne pas compliquer inutilement la situation - nous avons imposé des coefficients entiers relatifs. En revanche, pour ne pas interdire à l'élève une éventuelle curiosité qui l'incite à envisager des fonctions du type en jeu sans être soumis à ces contraintes, il est important que les fonctions à coefficients décimaux soient autorisées dans les tracés. Signalons en particulier l'intérêt de la visualisation des représentations graphiques des équations : $y=ax^2$ et $y=a\ x$, où $0<a<1$.

Les valeurs possibles de cette variable sont donc : "décimal" (valeurs décimales dans un intervalle fixé ou choisi) et entier (entiers compris entre deux entiers fixés ou choisis, -15 et + 15 par exemple).

- Variable "Choix du type des coefficients"

Une forme algébrique et un type de fonction étant donnés, pour avoir une représentation graphique qui respecte la condition de possession de caractéristiques directement interprétables déjà mentionnée, il vaut mieux que le choix du type de coefficients dépende du choix du repère et de l'échelle. Puisque le choix du repère est fait automatiquement, le choix du type des coefficients le sera aussi et il dépendra de plus du type de fonction.

c-3) **Variables "Outils"**

- Variable "Tracé" et Variable "Coordonnées"

Un objectif didactique du logiciel est de montrer les rôles que jouent les coefficients de l'expression algébrique d'une fonction dans sa représentation graphique. Pour cela, il est utile de donner à l'élève un moyen qui lui permette de visualiser les changements dans l'aspect de la représentation graphique dus au changement de tel ou tel coefficient. Ce moyen est assuré dans le logiciel par l'option "Tracé" qui trace la courbe correspondant à l'ensemble des valeurs des coefficients qui la déterminent. Le changement d'une valeur est visualisable graphiquement. La question du rôle des coefficients peut être ainsi abordée dynamiquement globalement par le graphique. La façon par laquelle se fait le traçage (point par point ou trait continu, selon un ordre imposé ou non) affecte l'aspect du tracé et éventuellement la visualisation. Le tracé est donc a priori une variable didactique.

Le moyen usuel pour l'élève de relier les représentations graphique et algébrique est ponctuel, c'est-à-dire par l'intermédiaire de coordonnées de points de la courbe. Le logiciel, tout en voulant favoriser les aspects globaux, permet cette articulation par l'option "Coordonnées". La façon dont se fait l'affichage des coordonnées - systématiquement par accompagnement du traçage point par point, ou sur commande par indication du point visé, ou résultat d'un repérage interne (non transparent) comme dans l'affichage du point (2;3) de la droite d'équation y=2x-1 sous la forme "x=2 et y=3", ou résultat d'un calcul explicite (transparent) de l'ordonnée à partir de l'abscisse et l'équation comme dans l'affichage "x=2 et y=2.2-1=3" du point cité - affecte le statut de ces coordonnées et leurs liens avec l'expression algébrique et la représentation graphique. Elle affecte aussi la démarche de l'élève dans le traitement de la question des relations graphico-algébriques. L'option "Coordonnées" est donc une variable didactique.

D'autre part, il est important que dans le logiciel l'on puisse jouer sur ces options, en les favorisant d'une façon disymétrique par des coûts faibles ou en les bloquant par des coûts élevés, pour étudier, ou faire évoluer, les stratégies des élèves.

En fait, les valeurs possibles de ces deux variables sont, dans le logiciel : "non/oui" et dans le cas "oui" "tracé point par point" et "tracé continu" pour la variable "Tracé", et "non/oui"et dans le cas "oui" "affichage point par point", "affichage sur commande", "transparent" ou "non transparent" pour la variable "Coordonnées". Dans le cas où la variable gestion d'un capital (cf. ci-après) est mise à oui ces deux variables sont mises automatiquement à oui et une valeur par défaut du coût est fixé. Les coûts des options tracé et coordonnées, peuvent prendre différentes valeurs, favorisant ou défavorisant, dans le contexte du jeu, leurs utilisations ainsi que certaines stratégies de travail.

- Variable "Présence simultanée des tracés"

Lors de son travail, l'élève peut effectuer plusieurs tracés auxiliaires pour approcher le tracé initial graphiquement. Le fait de laisser à l'écran tous ces tracés avec leurs équations peut lui permettre (lors d'éventuels feed-back) d'avoir des points repères dans sa recherche. S'ils sont trop nombreux, ils peuvent au contraire embrouiller l'élève.

Les valeurs possibles de cette variable sont, dans le logiciel : "oui", "non" ou "sur commande". Dans tous les cas, seuls les trois derniers tracés sont simultanément affichés.

- Variable "Validation partielle de la réponse"

Il nous semble important que le logiciel offre à l'élève un outil pour la validation de la réponse proposée et il nous semble utile que le logiciel permette de mentionner, le cas échéant, que cette réponse comporte des éléments corrects et d'indiquer quels sont les éléments qui sont corrects. Ceci permet à l'élève d'une part de découper le problème en traitant un à un les coefficients d'autre part, lorsqu'il y a traitement graphique de la réponse (cf. ci-après) d'associer aux bonnes caractéristiques graphiques de la réponse proposée les bons coefficients identifiés. Dans le cas où l'élève connaît - éventuellement, à une certaine étape de son travail - la signification de certains coefficients, il devient superflu de lui indiquer que ses coefficients sont bons et on pourrait dans ce cas se contenter de mentionner tout court que la réponse est bonne ou non.

La variable validation partielle de la réponse pourra donc avoir trois valeurs : "oui", "non" ou "sur commande".

- Variable "Traitement graphique de la réponse"

Le fait de faire accompagner une réponse proposée non correcte de sa représentation graphique est utile pour la visualisation des différences graphiques entre fonction donnée et fonction proposée. Ceci nous parait plus intéressant lorsque l'élève ne fait pas précéder sa proposition par un tracé-essai. Dans le cas contraire l'utilisation de ce traitement ne s'avère pas fort utile.

Notre variable prendra donc trois valeurs possibles : "oui", "non" ou "sur commande".

- Variable "Grille apparente"

Une grille apparente, qui consiste en un quadrillage du plan du repère, pourra apporter une aide lors de la lecture de certaines caractéristiques graphiques du tracé. elle pourra par contre encombrer l'écran et nuire à la clarté des représentations graphiques.

On peut envisager que cette variable, paramétrable à partir du module enseignant, puisse avoir elle aussi comme valeurs : "oui", "non", et "sur commande".

c-4) **Variables "Jeu"**

- Variable "Nombre de joueurs"

Du point de vue ludique, il nous semble attrayant pour l'élève que le jeu puisse se faire à plusieurs. Du point de vue didactique, le fait de jouer à plusieurs peut stimuler l'élève ou aider aussi à l'explicitation de certains conflits cognitifs et enrichir les points de vue de l'élève. Cette situation peut avoir un effet pervers si les joueurs sont, par exemple, de niveaux très différents et si ceci conduit l'élève le plus faible à abandonner, pratiquement, le jeu.

Le choix de la valeur de cette variable peut être fait par l'élève s'il n'a pas été fait au préalable par l'enseignant.

- Variable "Gestion d'un capital"

L'aspect jeu du logiciel et l'idée d'enjeu associée, nous ont suggéré l'introduction de l'idée d'un capital de points dans une question. On peut penser que, pour jouer le jeu, l'élève doit essayer de dépenser, en échange des services disponibles de l'ordinateur le minimum de son capital. Ceci incite alors l'élève à envisager des stratégies et à choisir la meilleure, c'est-à-dire la moins coûteuse. Suivant des systèmes de tarification différents des services de l'ordinateur, l'élève peut aussi être invité à favoriser certaines démarches qui servent des objectifs didactiques différents.

Une autre raison est de pouvoir distinguer plusieurs niveaux de difficultés dans les questions lors d'une séance, selon le tracé affiché : à un cas estimé difficile on peut accorder un capital plus grand que dans un cas considéré comme plus facile.

Une troisième raison est de pouvoir donner en quelque sorte une évaluation du travail de l'élève. Pour certains élèves, par exemple ceux dont le niveau général en mathématiques est considéré comme faible, on peut supposer qu'il leur serait difficile, au moins aux premiers exercices de la séance, d'arriver à ne pas épuiser tout le capital dans la recherche de la bonne réponse. Ceci aurait un effet décourageant ; mais une tarification "prix réduit" des services, permet de limiter cet effet. La présence d'un capital ou son absence est donc décidée par l'enseignant.

La variable gestion d'un capital peut donc avoir deux valeurs : "oui" ou "non". Dans le cas où elle prend la valeur "oui", des valeurs par défaut, modifiables par l'enseignant, sont données aux options "Tracé" et "Cordonnées" ainsi qu'à l'option "Réponse".

- Variable "Nombre de coups maximum"

Les actions possibles avec le logiciel (Tracé, Coordonnées, Réponse) n'ont pas les mêmes capacités informatives : Coordonnées donne une information sur un point, Tracé et Réponse renseignent sur tout le tracé. La limitation du nombre de coups, qui constitue un élément de l'aspect jeu du logiciel, pourra attirer l'attention de l'élève sur cette question et pourra l'inciter à faire de bons coups.

Comme la variable gestion d'un capital, cette variable peut gêner les débutants.

Les valeurs possibles sont "oui" et "non". La valeur du nombre maximum éventuel de coups sera fixée par l'enseignant.

Dans le cas où la gestion d'un capital est disponible, la valeur de la variable nombre maximum de coups sera mise automatiquement à "non".

- Variable "Chronomètre"

Limiter le temps dans lequel l'élève doit fournir sa réponse à une question peut être un élément dans l'aspect jeu qui accroît la motivation de l'élève et élève considérablement le degré de maîtrise des tâches requis par le logiciel. Mais ceci peut aussi conduire à répondre de façon précipitée sans réfléchir. Laisser le libre temps à l'élève dans son travail peut en revanche permettre à chacun de travailler selon son rythme. Connaître le temps "naturel" de réponse de l'élève est aussi important du point de vue recherche.

Les valeurs possibles de cette variable sont : "oui" et "non".

III) PROBLEMES RENCONTRES

La version recherche devait pouvoir tourner sur nanoréseau. Choix fait pour faciliter le déroulement de la phase d'expérimentation dans les établissements scolaires qui disposaient alors en majorité de ce matériel. Ce choix nous a confronté à des problèmes d'ordre technique qui n'ont pas été sans conséquences sur certains choix didactiques effectués pour la version recherche du logiciel. Les contraintes sont dues essentiellement à deux problèmes :

A) PROBLEME DE COULEURS

Le coloriage de l'écran sur nanoréseau se fait par segments de 8 pixels. Une couleur attribuée à un point peut affecter tout les points du segment auquel ils appartiennent. Des couleurs différentes risquent ainsi de se mélanger.
Une solution à ce problème peut être, d'une part, de réduire le nombre de points au voisinage des points d'intersection de lignes tracées sur l'écran d'autre part, de veiller à ne pas présenter beaucoup de tracés en même temps à l'écran.

B) PROBLEME DE VITESSE

La vitesse d'exécution des instructions élémentaires est relativement faible sur ce matériel. Les opérations d'écriture sur disque, lors de l'enregistrement automatique des actions des élèves, demandent du temps. Le temps d'attente éventuel du serveur pour effectuer des opérations demandées par les machines du nanoréseau peut être gênant pour le fonctionnement du logiciel.

Dans un contexte interactif, le problème est d'autant plus apparent que le traitement qui fait suite à une action de l'élève est plus important. Dans le logiciel, c'est celui correspondant à l'option "Tracé".

Le problème paraît très critique puisque dans certaines situations (par exemple, lorsque l'option "Tracé" est utilisée comme outil de contrôle de la réponse ou lorsque le coût de cette option est faible) les tracés peuvent être très sollicités lors du fonctionnement du logiciel.

C) SOLUTION ADOPTEE

Comme un tracé est en réalité un ensemble de points et comme en pratique le nombre de ces points est choisi de telle façon que le tracé ait un aspect "continu", on peut envisager qu'une solution à ce problème consiste à réduire le nombre de points effectivement tracés sur la représentation graphique. Cette solution pourra nuire à l'aspect "continu" du tracé mais il est possible de faire en sorte que les points tracés suffisent pour suggérer la forme voulue du tracé. Du point de vue pratique, on pourra alors gagner en vitesse d'exécution des tracés sans beaucoup perdre en ce qui concerne leur clarté. La solution adoptée a été de réaliser un équilibre entre les contraintes temps et les contraintes de visualisation. Elle a consisté en :

1) la réduction du nombre des points du tracé,

2) l'effacement automatique d'un tracé auxiliaire avant d'en tracer un autre, mais avec conservation du tracé initial,

3) l'absence de l'option "grille".

IV) LA VERSION EXPERIMENTALE

IV-1) VALEURS DES VARIABLES

Le logiciel, dans sa version utilisée pour l'expérimentation réalisée, est en réalité la version "recherche" du cahier de charges déjà présentée. Elle a été écrite en BASIC et elle tourne sur nanoréseau. Relativement aux variables didactiques du logiciel, cette version possède les caractéristiques suivantes :

a) VARIABLE REPERE

Cette variable a la valeur : repère fixe traditionnel (repère orthonormal centré et 0.5 cm pour longueur de l'unité).
Nous avons fait ce choix pour les raisons suivantes :

1) éviter les difficultés liées aux changements de repère,

2) conserver une situation traditionnelle, adaptée aux types de fonctions choisis (cf. ci-après).

b) VARIABLES FONCTION

- La variable Type de fonction est fixée à la valeur : "fonctions polynomiales du premier et du second degré".

- La variable Choix du type de fonction est fixée à la valeur : "imposé par l'enseignant". Ce choix est fait pour faciliter l'utilisation du logiciel lors de l'expérimentation à des niveaux différents de l'enseignement : premier et deuxième cycle du secondaire.

- La variable Forme algébrique est fixée de la façon suivante : au type fonction du premier degré, correspond la forme $f(x)=ax+b$ et au type fonction du second degré, correspondent les trois formes $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=a(x-p)^2+q$ et $f(x) =a(x-r)(x-s)$.
Les raisons de ce choix sont les suivantes :

1) ce sont, pour chacun des types à étudier, les formes les plus rencontrées dans l'enseignement, bien que l'accent ne soit pas mis identiquement sur les trois formes relatives aux fonctions du second degré,

2) elles mettent en relation les coefficients et des caractéristiques graphiques pertinentes, à la fois globales et ponctuelles, ce que ne permettent pas d'autres formes possibles comme par exemple : $x/m+y/p=1$ (où les caractéristiques graphiques en jeu bien que pertinentes (points sur les axes) sont toutes ponctuelles) ou $y=a[x(x-s)+p]$ (où la seule caractéristique graphique pertinente mise en jeu est l'ouverture de la parabole).

- La variable Choix de la forme algébrique a la valeur suivante : "libre par exercice". Ce choix est fait dans le but de permettre à l'élève de passer facilement d'une forme à l'autre et d'étudier les modalités de ces passages.

- La variable Type des coefficients a la valeur : "entier entre -15 et 15" pour les coefficients de la fonction proposée par la machine et "décimal" pour les fonctions proposées par l'élève. Ce choix est fait pour rendre possible dans certains cas la lecture graphique de certains coefficients.

- La variable Choix du type des coefficients a la valeur : "choix automatique".

c) <u>VARIABLES JEU</u>

- La variable Nombre de joueurs a pour valeur : "un".
- La variable Gestion d'un capital a pour valeur : "oui" et le capital est de 20.
- La variable Nombre de coups maximum a comme valeur : "non".
- La variable Chronomètre a la valeur : "non".

d) <u>VARIABLES OUTILS</u>

- Variable Tracé et Variable Coordonnées :

Les variables Tracé et Coordonnées sont toutes les deux fixées à Oui. Les coûts de ces deux options ainsi que celui de l'option Réponse sont fixés par l'enseignant lors de son choix du système de tarification parmi les 5 systèmes donnés par le tableau suivant :

Système	Coordonnées	Tracé	Réponse
1	2	2	8
2	4	4	8
3	2	16	8
4	16	2	8
5	4	4	16

Le système 1 est choisi dans le but d'inciter les élèves à utiliser les aides sans avoir peur de perdre beaucoup. C'est un système "indulgent" qui pourra être utilisé lors de la première séance avec le logiciel. En revanche, il pénalise les réponses au hasard.

Le système 2 est identique tout en étant plus "sévère".

Les deux systèmes 1 et 2 traitent de façon symétrique les deux options Tracé et Coordonnées tout en défavorisent la réponse "pour voir".

Le système 3 favorise considérablement l'option Coordonnées et favorise un fonctionnement de l'élève utilisant uniquement cette option, tandis que le système 4 l'oblige à utiliser uniquement l'option Tracé.

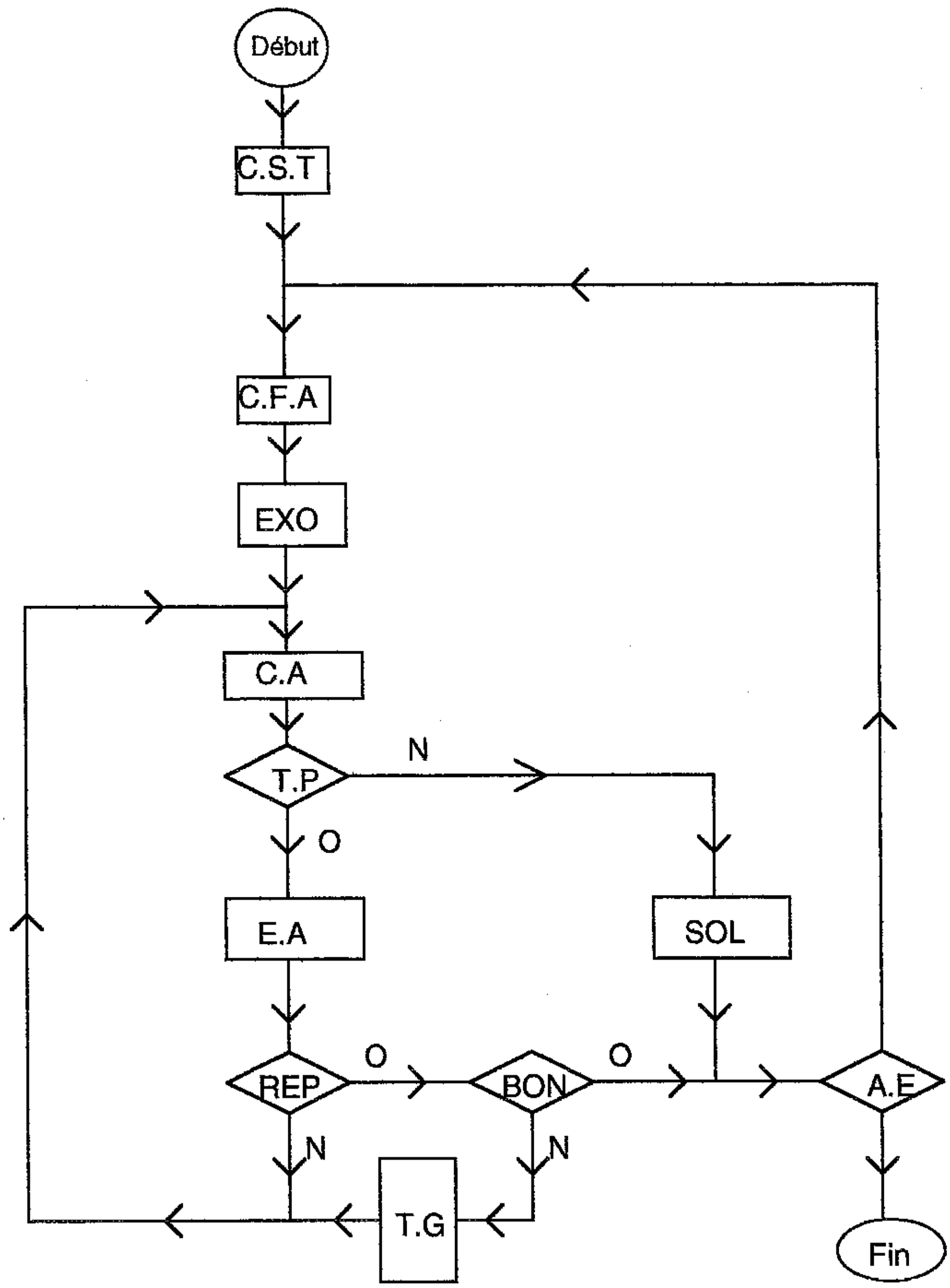
Le système 5 enfin, interdit pratiquement les réponses sans contrôle préalable.

- La variable Présence simultanée des tracés a la valeur : "non". Ce choix est lié au problème de coloriage du système nanoréseau où l'on risque de nuire à la clarté des tracés sur l'écran.
- La variable Validation partielle de la réponse a la valeur : "oui".
- La variable Traitement graphique de la réponse a pour valeur : "oui". Ce choix est lié à la décision de présence permanente du graphique et de l'algébrique dans le traitement.
- La variable Grille apparente a pour valeur : "non". Ce choix est lié à la contrainte de la lenteur de traitement du système.

IV-2) DESCRIPTION EXTERNE

Le schéma suivant décrit le fonctionnement du logiciel. Les codes qui y apparaissent sont :

C.S.T	pour Choix du Système de Tarification.
C.F.A	pour Choix de la Forme Algébrique.
EXO	pour nouvel exercice.
C.A	pour Choix d'une Action.
T.P	pour Test de la Position du capital : position permettant l'action ou pas ?
E.A	pour Exécution de l'Action.
SOL	pour SOLution
REP	pour REPonse ou pas ?
BON	pour BONne ou pas ?
A.E	pour Autre Exercice ou pas ?
T.G	pour Traitement Graphique.
O	pour Oui.
N	pour Non.


Début
C.S.T
C.F.A
EXO
C.A
T.P
N
O
E.A
SOL
REP
O
BON
O
A.E
N
N
T.G
Fin

IV-3) GESTION DE L'ECRAN

Pour accroître la convivialité du logiciel, rendre son utilisation plus facile, et pour assurer également une bonne présentation des messages, des indications et des tracés, l'écran a été partagé en sept fenêtres (figure 3-1) :

1) Fenêtre "Dialogue sur l'exercice" dans laquelle, lors d'un exercice, d'une part, sont affichés les messages envoyés par le logiciel et les indications sur son utilisation, et d'autre part sont introduites les entrées de l'élève.

2) Fenêtre "Graphique" dans laquelle se font les tracés.

3) Fenêtre "Actions / Action courante" dans laquelle sont affichées, soit l'action en cours d'exécution et éventuellement ses paramètres, soit les actions disponibles.

4) Fenêtre "Capital" dans laquelle sont affichés la position du capital et le code du "système de tarification" choisi.

5) Fenêtre "Score moyen / Nombre d'exercices traités" dans laquelle sont donnés le score moyen au cours de la séance et le nombre d'exercices déjà traités.

6) Fenêtre "Dialogue sur la séance" dans laquelle se déroule le dialogue sur la suite à donner au travail.

7) Fenêtre "Statistiques" dans laquelle sont données des statistiques sur la séance.

IV-4) DESCRIPTION DETAILLEE

Une fois que le système de tarification et la forme algébrique de la fonction sont choisis, la machine présente (en vert) la courbe dont il faut trouver l'équation sous la forme déjà choisie (figure 3-2), l'écran étant muni d'un repère orthonormé dont l'origine est au centre de l'écran. Sur les axes apparaissent des points dont les coordonnées sont des valeurs entières allant de -12 à +12. Ces axes sont en rouge.

La machine est alors prête à exécuter les commandes (Tracé, Coordonnées, Effacer, Réponse) qui apparaissent dans la fenêtre "Actions / Action courante". Pour ceci il suffit de taper l'initiale de la commande.

T permet de faire tracer n'importe quelle courbe de la famille des courbes qui correspondent au type de fonction et à la forme choisis. Pour cela il suffit d'introduire au clavier les valeurs des coefficients impliqués dans la forme algébrique choisie ; ils apparaissent successivement dans la fenêtre "Dialogue exercice" de l'écran. Dans la fenêtre "Actions / Action courante" s'affiche le nom de l'action "Tracé" suivi de l'équation de la courbe proposée (figure 3-3) qui sera ensuite tracée en bleu (éventuellement après effacement d'un tracé précédent) dans la fenêtre "Graphique" (figure 3-4), sauf si le tracé correspondant à l'équation introduite ne tient pas sur l'écran. Dans ce cas une mention "Tracé hors écran" apparaît dans la fenêtre "Dialogue exercice " (figure 3-5).

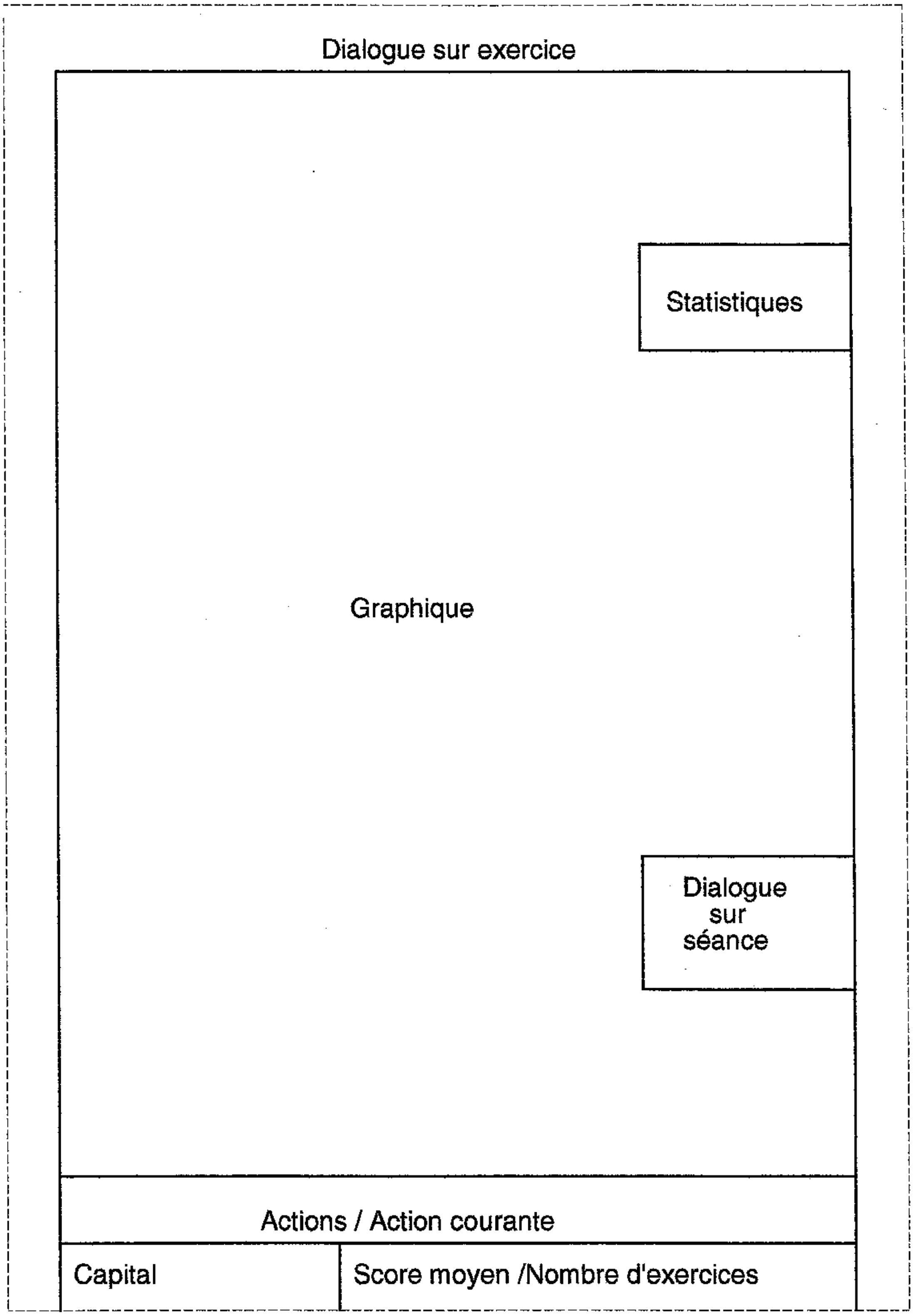

Dialogue sur exercice
Statistiques
Graphique
Dialogue sur séance
Actions / Action courante
Capital
Score moyen /Nombre d'exercices

Figure 3-1

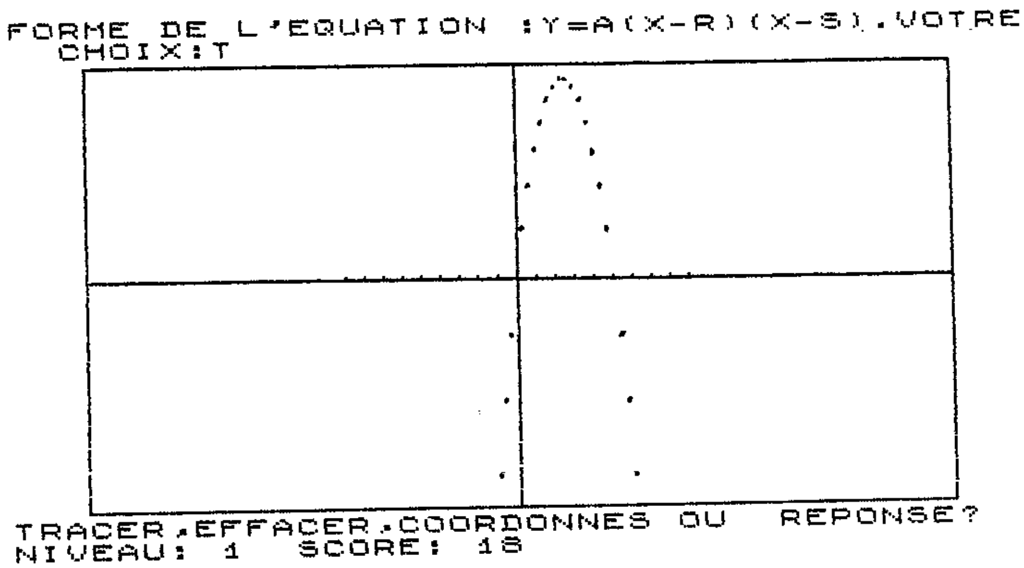


Figure 3-2

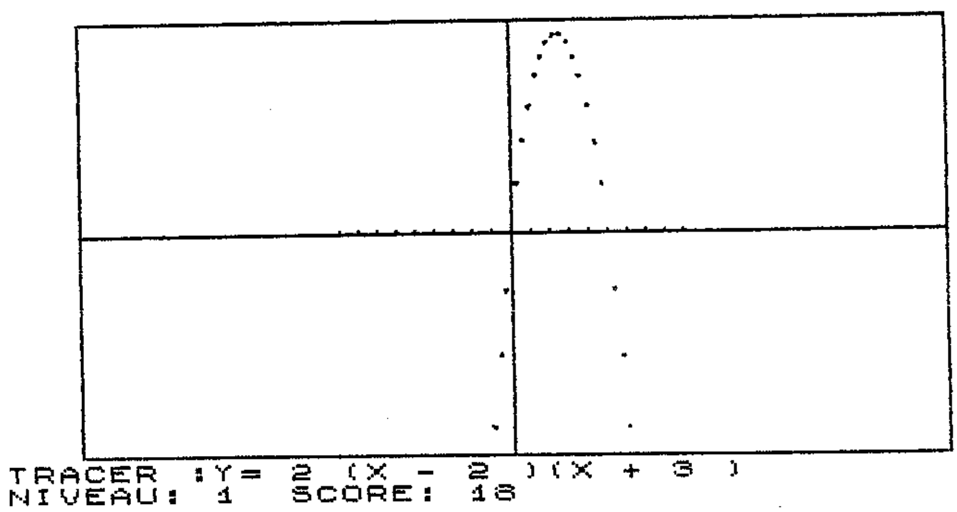


Figure 3-3

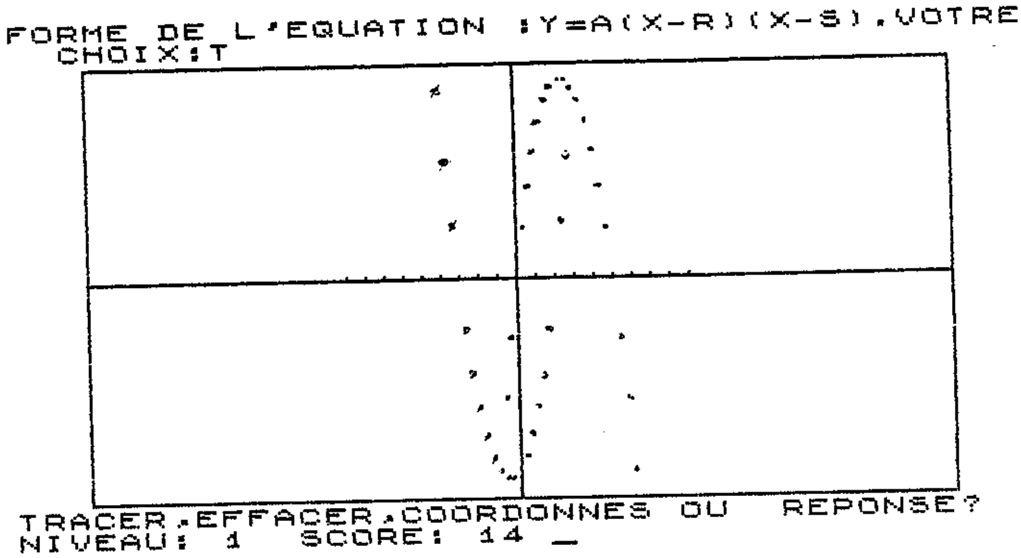


Figure 3-4

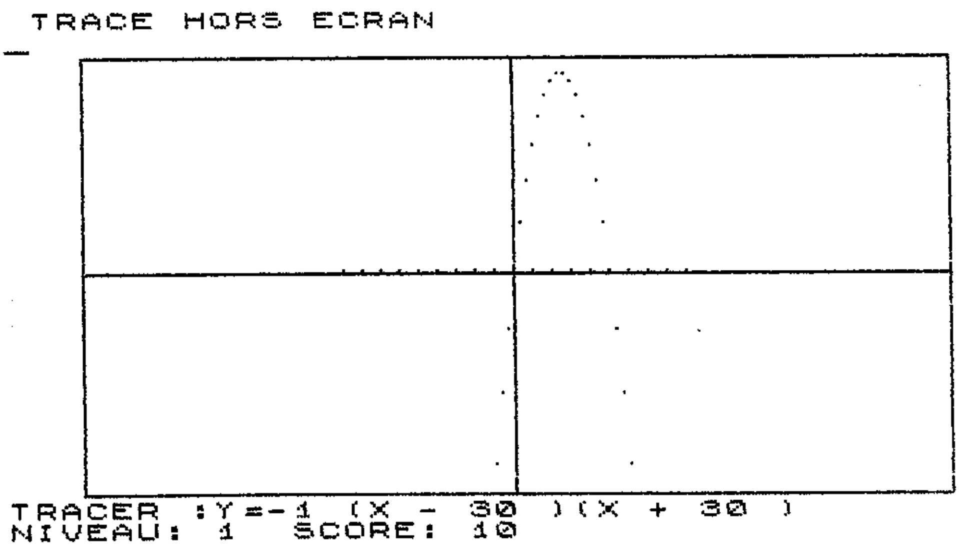


Figure 3-5

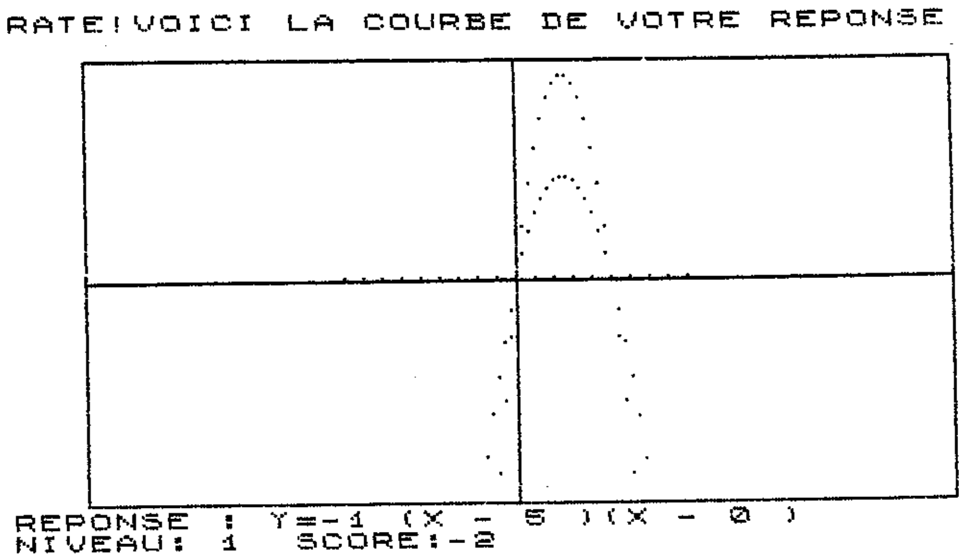


Figure 3-6

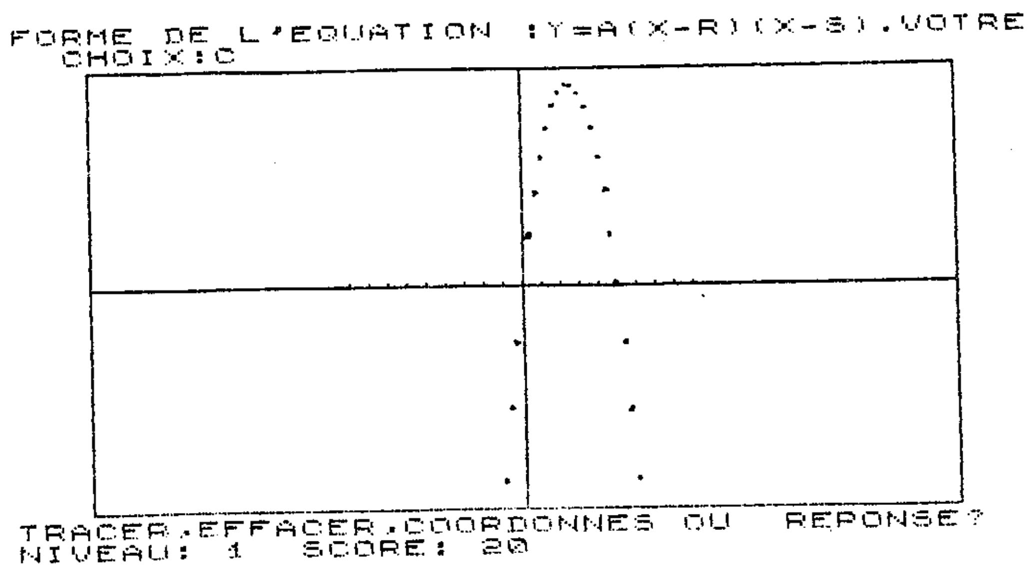


Figure 3-7

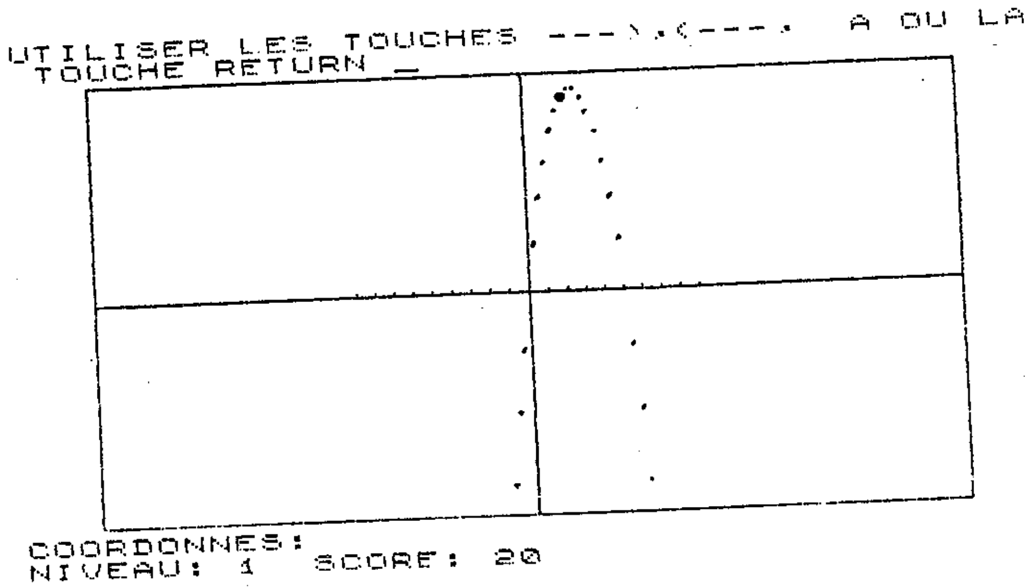


Figure 3-8

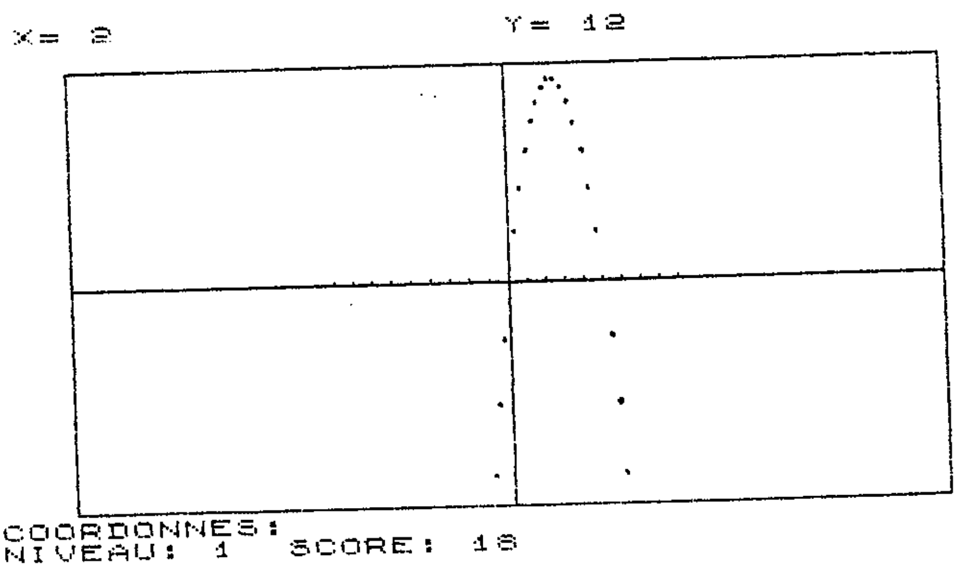


Figure 3-9

R permet à l'élève de communiquer sa réponse au logiciel. Il suffit, pour cela, d'introduire les valeurs des coefficients qui correspondent à cette réponse et qui apparaissent successivement dans la fenêtre "Dialogue exercice". La réponse sera directement affichée dans la fenêtre "Actions / Action courante".

Si la réponse est bonne, alors l'élève peut passer à un autre exercice ; si elle ne l'est pas son tracé apparaît dans la fenêtre "Graphique", éventuellement accompagné des coefficients corrects dans la fenêtre "Dialogue exercice".

Dans le cas où la réponse n'est pas bonne et où le capital est entièrement épuisé, l'équation demandée s'affiche dans la fenêtre "Capital " (figure 3-6).

C permet d'accéder aux coordonnées des points de la courbe donnée initialement. Ceci passe par les actions suivantes :

1) Le mot "Coordonnées" s'affiche dans la fenêtre "Actions / Action courante",

2) Un point de cette courbe se colorie en violet (figure 3-7),

3) Des indications sur ce qu'il faut faire ensuite, sont données dans la fenêtre "Dialogue exercice",

4) Si le point violet n'est pas le point dont on veut connaître les coordonnées, on peut l'amener en utilisant les touches ---------> et <---------- au point voulu (figure 3.8),

5) La frappe de la lettre A permet l'affichage des coordonnées du point violet dans la fenêtre "Dialogue exercice" sous la forme "X = , Y = " (figure 3-9).

E permet d'effacer le dernier tracé .

Il est clair qu'une action que la position du capital ne permet pas, n'est pas possible et que chaque fois qu'une action a été effectuée le capital est décrémenté de son coût ; la seule action possible, lorsque le capital est épuisé, est de proposer une réponse.

IV-5) ENREGISTREMENT DU TRAVAIL :

Dans une séance de travail de l'élève avec le logiciel, l'interaction élève/machine est enregistrée automatiquement dans un fichier.

Les informations recueillies pour chaque question traitée sont :

1) Le système de tarification choisi.
2) Le type de fonction.
3) La forme de l'expression algébrique.
4) Les valeurs des coefficients.
5) Les équations des tracés auxiliaires éventuels.
6) Les coordonnées des points éventuellement affichées.
7) Les réponses fournies.
8) Le résultat de l'élève.
9) Le capital restant.

Les informations globales sur la séance sont :

1) Le capital restant moyen.
2) Le nombre d'exercices traités et le nombre d'exercices réussis pour chaque forme traitée.
3) Le score minimum et le score maximum pour chaque forme traitée.

CHAPITRE IV

ORGANISATION GENERALE DE L'EXPERIMENTATION
ET
OUTILS D'ANALYSE

ORGANISATION GENERALE DE L'EXPERIMENTATION ET OUTILS D'ANALYSE

I) INTRODUCTION

L'expérimentation a pour but principal de nous permettre d'étudier les deux questions essentielles précisées dans notre problématique, à savoir, l'apprentissage dans un environnement informatique de type jeu ainsi que ses liens avec les comportements des élèves et leur rapport au jeu.

Nous avons choisi d'étudier ces questions dans deux situations bien différentes :

1) La séquence informatique intervient, à un moment où les savoirs en jeu dans le logiciel ne sont plus enjeu d'enseignement officiel[1], c'est-à-dire avec des élèves qui sont censés être déjà familiarisés avec le contenu mathématique en jeu dans l'environnement. La séance informatique organisée constitue de fait le seul moment d'enseignement spécifique sur les relations graphico-algébrique à propos des fonctions du second degré.
C'est le cas pour l'expérimentation avec les élèves de première et terminale.

2) La séance informatique intervient au cours d'un enseignement officiel sur le domaine, c'est-à-dire avec des élèves non familiers avec les contenus mathématiques en jeu dans l'environnement. Elle a eu lieu juste après le cours sur les équations des droites.
C'est le cas de l'expérimentation en troisième.

Les élèves qui ont participé à cette expérimentation sont tous volontaires et elle s'est déroulée en trois étapes : pré-test, session de travail avec le logiciel et post-test. Dans toutes les phases de l'expérimentation, les fonctions rencontrées par les élèves sont du premier degré dans le premier cycle et du second degré dans le second cycle. La forme d'expression algébrique des fonctions du premier degré étant P0 : $A x + B$, et les formes algébriques concernées par les fonctions du second degré étant P1 : Ax^2+Bx+C, P2 : $A(x-P)^2+Q$ et P3 : $A(x-R)(x-S)$.
Mais les élèves du second cycle ont été partagé en deux groupes : G1 et G2. Les élèves du groupe G1 ont travaillé avec les formes P1 et P3 et ceux de l'autre ont travaillé avec les formes P2 et P3.
Ce choix est justifié par les raisons suivantes :
- Il était essentiel pour nous que les élèves travaillent avec plus qu'une forme pour pouvoir étudier la transférabilité des acquis d'une forme à une autre mais les contraintes temporelles ne permettaient pas un jeu avec les 3 formes. Il fallait donc construire deux groupes chacun pouvant travailler sur une forme commune et sur une des autres formes.
- Nous faisions l'hypothèse que le sens des coefficients impliqués par ces formes d'expression n'est pas construit et que visuellement on peut penser que cette construction est plus envisageable avec P2 et P3 qu'avec P1 puisqu'avec P2 et P3 le rôle de A est le même, et la

[1] Cf. [Chevallard, 1989].

signification de R et S d'une part, et de P et Q de l'autre, est liée à la lecture de coordonnées de points particuliers, mais dans P1 A joue toujours le même rôle et C est lié à la lecture de coordonnées d'un point tandis que B lui, s'il est lié à un point aussi, sa signification met en jeu autres éléments que la lecture de coordonnées d'un point, et de ce fait il est moins accessible pour les élèves du second cycle que les autres. Nous avons donc écarté P1 du choix de la forme commune.

- A priori, on peut penser que P2 et P3 sont au même niveau par rapport au sens des coefficients et que P2 est plus favorisé dans le cadre algébrique par l'habitude de mise sous forme canonique des équations du second degré. Mais on peut aussi penser que pour la forme P3, il peut y avoir une prise de conscience du sens de la factorisation des polynômes liée à la recherche des racines, étudiée par ailleurs. D'autre part, le jeu de deux coefficients R et S est symétrique ce qui n'est pas le cas pour P2. Ceci peut renforcer le rôle de certains effets visuels. Nous avons donc choisi P3 comme forme commune.

Dans ce chapitre, après avoir précisé le rôle central de la notion de savoir atomique, comme outil d'analyse, dans notre méthodologie en général, et dans l'élaboration des tests et l'analyse de leurs résultats en particulier, nous présenterons les préalables de l'expérimentation: dispositif et autres outils d'analyse.

II) ROLE CENTRAL DE L'OUTIL SAVOIR ATOMIQUE

Le logiciel, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, propose à l'élève de traiter la question d'association courbe-équation en utilisant, les actions logicielles : Afficher des coordonnées, Tracer une parabole (resp. une droite) et Proposer une réponse. Eventuellement, l'élève peut aussi utiliser des actions traditionnelles de calcul mathématique, dans le cadre papier/crayon (Former une équation, Ecrire un système d'équations, Réduire un système d'équations, Résoudre un système d'équations) et des actions mathématiques de lecture et d'estimation (Lire des coordonnées, Lire un coefficient, Estimer un coefficient). Notre hypothèse fondamentale est que dans un tel environnement, l'interaction de l'élève avec le logiciel mettant en jeu, par l'effet dynamique des variations graphiques accompagnant des variations dans l'expression algébrique, des connaissances sur le domaine des relations graphico-algébriques, permet, sous certaines conditions que nous évoquerons dans la suite, lors de l'analyse a priori des stratégies d'élèves, des changements dans les connaissances de l'élève. Ces changements, lorsqu'ils sont suffisamment importants, peuvent conduire à des apprentissages repérables. La progression de l'élève est a priori liée au comportement de l'élève en séance et, éventuellement, aux stratégies qu'il utilise.

L'expérimentation, dont l'un des objectifs est de nous donner les moyens de vérifier notre hypothèse, doit nous permettre de disposer d'observables dont l'étude mettra en évidence, en particulier, la manifestation ou non de connaissances, l'évolution ou non de ces connaissances et l'existence ou non de liens entre les changements cognitifs et les comportements des élèves. La méthode d'analyse de ces situations doit donc permettre de disposer d'un moyen de repérage des connaissances permettant leur identification à partir des observables et la détection des changements. Elle doit aussi permettre de disposer d'un moyen de quantification des connaissances permettant la comparaison à des moments différents de l'expérimentation et la mesure de l'importance de l'évolution éventuelle entre différents moments. Le repérage des connaissances et leur quantification nécessitent l'adoption d'un système de connaissances de référence.

Ce système de référence est construit à partir de la notion de "connaissance atomique". Plus précisément :

Les connaissances mises en jeu par les relations équation-courbe, dans le cas des fonctions polynomiales du premier et du second degrés, auxquelles nous nous limitons dans cette expérimentation, peuvent être considérées, relativement au registre de l'expression algébrique, comme des connaissances de deux niveaux :

1) Des connaissances de niveau 1, mettant en relation simultanément plusieurs coefficients de l'équation comme par exemple, dans le cas de la parabole d'équation $y=Ax^2+Bx+C$, les connaissances : "le point M (x_0, y_0) appartient à la parabole si et seulement si x_0 et y_0 sont tels que $y_0 = Ax_0^2+Bx_0+C$", ou "la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses si et seulement si $B^2-4AC<0$" ou "l'abscisse du sommet est égale à $-\frac{B}{2A}$".

2) Des connaissances de niveau 2, ne mettant en jeu qu'un seul coefficient, comme par exemple dans le cas de la parabole d'équation $y=Ax^2+Bx+C$, les connaissances : "B est la pente à l'origine", ou "C est l'abscisse du point de la parabole sur l'axe des ordonnées".

Notons que, parmi les connaissances de niveau 2 on peut identifier des sous-connaissances, qui expriment des propriétés des coefficients, comme par exemple dans le cas de la parabole d'équation $y=Ax^2+Bx+C$, la sous-connaissance "A est positif si et seulement si l'ouverture de la parabole est dirigée vers le haut" ou la sous-connaissance "B est nul si et seulement si le sommet de la parabole est sur l'axe des ordonnées".

Ces sous-connaissances de niveau 2 sont donc des composants des connaissances de niveau 2. Mais bien que, l'identification des sous-connaissances composants d'une connaissance de niveau 2 ne signifie pas nécessairement le repérage de cette connaissance , elle permet néanmoins l'identification de connaissances plus élémentaires associées à cette connaissance. Les connaissances mises en jeu par notre environnement informatique qu'il nous a semblé pertinent de repérer sont donc ces connaissances repérables dans les travaux des élèves dans l'environnement informatique et dans les travaux avec une situation papier/ crayon.

Ajoutons que, dans notre projet, nous avons l'ambition que l'analyse des travaux en séance en termes de connaissances puisse se faire automatiquement. Ceci passe par le repérage automatique des connaissances à partir des informations enregistrées automatiquement. Or les entrées enregistrées sont souvent faites coefficient par coefficient. D'où l'importance de construire un outil d'analyse se situant plutôt au niveau 2.

De plus, sauf exception, les connaissances de niveau 1 mettant en jeu plusieurs coefficients simultanément, sont plus complexes.

Ce sont donc essentiellement ces sous-connaissances qui sont appelées connaissances atomiques et les savoirs correspondants sont les savoirs atomiques.

II-1) SAVOIRS ATOMIQUES

Un savoir atomique est défini comme un savoir répondant aux caractéristiques suivantes:

1) c'est un savoir qui exprime une relation entre une propriété d'un coefficient et une caractéristique graphique.
2) cette relation doit pouvoir être accessible par "simple lecture" du graphe.

En ce sens, le savoir : "les coordonnées d'un point appartenant à une parabole sont les composantes d'une solution de l'équation de cette parabole" et le savoir : "P_1 et P_2 étant respectivement les paraboles correspondant aux fonctions $A_1x^2+B_1x+C_1$ et $A_2x^2+B_2x+C_2$, $B_1/A_1=B_2/A_2$ <---------> P_1 et P_2 ont des sommets de même abscisse" ne sont pas des savoirs atomiques car ces énoncés mettent en jeu plusieurs coefficients simultanément.

Parmi ces savoirs nous choisissons les plus simples[2] : le passage ne doit nécessiter, théoriquement, ni calcul intermédiaire, ni raisonnement complexe, mais juste une lecture graphique directe. Ainsi l'interprétation graphique du signe de A est un "savoir atomique" tandis que le fait de donner la valeur exacte de A correspondant à une parabole donnée ne l'est pas. Mais il faut préciser que par lecture graphique directe, il peut s'agir d'une lecture ponctuelle (comme la lecture du signe de l'ordonnée à l'origine d'une droite) aussi bien que d'une lecture globale (comme la lecture du signe de la pente d'une parabole sur un intervalle). Rappelons ici que les recherches didactiques[3] ont montré qu'il ne s'agit pas dans les deux cas du même niveau de complexité cognitive.

Soulignons qu'un savoir atomique n'est pas nécessairement un savoir élémentaire simple du point de vue cognitif. Par exemple, "B>0 <---------> La parabole P a une pente positive à son intersection avec l'axe Oy" est un savoir atomique. Ce savoir n'est pas disponible au niveau de la classe de seconde puisqu'il repose sur l'interprétation de la dérivée d'une fonction en terme de pente d'une courbe en un point et, même pour des élèves plus avancés, il reste non élémentaire car il demande une lecture du graphe non au niveau de la fonction mais au niveau de la dérivée.

Notons enfin que certains savoirs "non atomiques" sont sans doute plus accessibles que des savoir atomiques. C'est le cas par exemple, du savoir non atomique "la parabole correspondant à une fonction polynomiale du second degré dont la somme des coefficients est nulle passe par le point (1 ; 0))" par rapport au savoir atomique sur B ci-dessus.

---

[2] Au sens de la condition 2.
[3] Duval 1988, par exemple.

Les savoirs atomiques simples qui seront retenus dans la suite, constitueront le système de référence qui est à la base de notre méthode d'analyse.

II-2) SAVOIRS ATOMIQUES ET TESTS

Les tests ont pour but de nous permettre de cerner les connaissances des élèves sur les relations entre cadre algébrique et cadre graphique relatives à l'interprétation des coefficients d'une forme algébrique donnée et leur évolution. Ces connaissances devant être identifiées et quantifiées par retour à notre système de référence, pour l'élaboration des tests, nous avons d'abord cherché à identifier les savoirs élémentaires atomiques en jeu dans les relations entre coefficients algébriques et caractéristiques graphiques des types de fonctions concernées. C'est sur la base de ces savoirs élémentaires atomiques qu'ont ensuite été construites les tâches proposées dans les tests.

II-3) SAVOIRS ATOMIQUES ET ANALYSE DES RESULTATS

Les résultats des tests sont analysés en termes de connaissances atomiques ce qui permet d'interpréter ces résultats en termes de compétences sur le domaine, avant et après la séance informatique, de désigner les savoirs qui semblent les mieux connus et les savoirs les moins connus, avant et après, les savoirs les plus affectés par la séance informatique, de hiérarchiser ces savoirs selon le type de l'équation-courbe ou à l'intérieur d'un même type. Ils permettent aussi de montrer l'effet global de la séance et son importance. L'interprétation de ces résultats, du point de vue didactique comme du point de vue cognitif, passe par leur mise en relation avec les travaux en séance. Celle-ci fait l'objet de deux types d'analyse : des analyses statistiques globales et une analyse qualitative plus fine de type étude de cas, comme nous l'avons précisé dans le chapitre I.

Les travaux des élèves en séance, reconstruits à partir des informations recueillies automatiquement lors de la séance et des traces sur les brouillons, seront étudiés en liaison avec les tests et seront analysés à deux niveaux :

1) un niveau d'analyse globale et sommaire qui conduit à une fiche-résumé source des données traitées ultérieurement, par les analyses statistiques,

2) un niveau d'analyse fine et détaillée orientée vers l'étude de la dynamique cognitive de l'élève, des relations entre cette dynamique et les stratégies utilisées en séance, des phénomènes qui paraissent significatifs par rapport à la réussite.

Pour préparer cette analyse fine nous avons au préalable réalisé une analyse a priori des stratégies possibles des élèves et de leurs coûts intégrant les connaissances mises en jeu, les calculs éventuellement requis et la tarification des options.

Avant de décrire en détail l'expérimentation et de faire l'analyse de ses résultats, nous allons présenter les préalables nécessaires à cette expérimentation.

III) DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Il s'agit de présenter, le dispositif nécessaire à la réalisation de l'expérimentation, et les outils d'analyse nécessaires à la conduite de l'étude de l'expérimentation et de ses résultats.

Les supports de l'expérimentation sont : le logiciel et les tests. Les outils d'analyse sont:
- **a priori** :
    1) les savoirs atomiques,
    2) l'analyse a priori des stratégies d'élèves, des connaissances qu'elles mettent en jeu et de leur coûts respectifs,
- **a posteriori** :
    1) l'analyse statistique élémentaire des résultats pré-test/post-test,
    2) l'analyse statistique des données globales sur les travaux des élèves,
    3) l'analyse fine des protocoles.

A propos du dispositif expérimental, de la séance informatique et des tests, ayant déjà présenté la version expérimentale du logiciel, nous allons maintenant présenter les questionnaires des tests.

III-1) QUESTIONNAIRES

a) ELABORATION DES QUESTIONNAIRES

Selon notre méthodologie (cf. chapitre I), les tests au premier cycle portent sur les fonctions du premier degré de la forme $y=Ax+B$. Au second cycle, pour 17 des élèves, l'expérimentation porte sur les fonctions du second degré de la forme P1 : $y = Ax^2+Bx+C$ et de la forme P3 ; $y=A(x-R)(x-S)$, pour les autres sur celles de la forme P2 : $y=A(x-P)^2+Q$ et de la forme P3. Dans la suite, nous désignerons par G_1 le groupe des 17 et par G_2 l'autre groupe.

b) SAVOIRS ATOMIQUES A REPERER :

Il s'agit des savoirs sur les relations graphico-algébriques dans le cas des fonctions du premier et du second degré -auxquelles sont associées leurs représentations graphiques dans un plan muni d'un repère orthonormal dont l'axe des abscisses est horizontal et orienté dans le sens de la gauche vers la droite et l'axe des ordonnées est orienté de bas vers le haut. Nous "décomposons" ces savoirs en "savoirs atomiques" qui sont liés à un seul coefficient de l'expression algébrique.

Dans la section suivante nous donnons, pour les fonctions du premier degré, et pour chacun des types P1, P2 et P3 les "savoirs atomiques" que nous avons retenus. Ce ne sont pas tous les savoirs atomiques repérables au sens de la définition. Ce sont en général des savoirs qui, pour un coefficient, portent, sur le signe, l'ordre de grandeur, certaines valeurs particulières ainsi que sur des relations simples entre différentes valeurs du coefficient.

1) Cas de y = A x + B

Coefficient A : A est associé graphiquement à la pente de la droite. La valeur absolue de A est une mesure de l'inclinaison (par rapport à l'axe des abscisses) et le signe de A est associé à l'orientation de la droite.

a) savoirs atomiques liés au signe de A : Il s'agit des savoirs concernant l'orientation , liés à une seule droite :

(Apos) : A est positif <---------> la droite "monte"[4].

(Aneg) : A est négatif <---------> la droite "descend"[4].

b) Ordre sur A : Il s'agit des savoirs, liés à plusieurs droites, mettant en jeu la valeur de l'inclinaison, A_1 et A_2 étant respectivement les valeurs de A correspondant aux droites D_1 et D_2 :

(AOrd) : $|A_1| < |A_2|$ <---------> l'inclinaison de D_1 est plus petite que de l'inclinaison de D2.

(AposOrd) : lorsque A_1 et A_2 sont positifs,
$A_1 < A_2$ <---------> l'inclinaison de D_1 est plus petite que l'inclinaison de D_2.

(AnegOrd) : lorsque A_1 et A_2 sont négatifs,
$A_1 < A_2$ <---------> l'inclinaison de D_1 est plus grande que l'inclinaison de D_2.

La distinction entre le cas positif et le cas négatif est faite pour permettre de pouvoir identifier des niveaux intermédiaires dans la maîtrise des relations impliquant l'inclinaison, en écartant la difficulté cognitive auxiliaire (au niveau du premier cycle) de la valeur absolue.

c) Relations particulières entre valeurs de A :

(Aeg) : $A_1 = A_2$ <---------> D_1 et D_2 ont même inclinaison et même orientation.

(Aop) : $A_1 = -A_2$ <---------> D_1 et D_2 ont même inclinaison mais des orientations opposées.

---

4 Implicitement, dans le sens usuel de lecture de la gauche à la droite.

Coefficient B : B peut être interprété comme étant l'ordonnée à l'origine. Les savoirs atomiques associés à B sont :

a) Signe de B : Il s'agit des savoirs suivants portant sur le point d'intersection I de la droite avec y'y.

(Bpos) : B est positif <---------> I est au-dessus de l'axe des abscisses.

(Bneg) : B est négatif <---------> I est au-dessous de l'axe des abscisses.

b) Ordre sur B :

(Bord) : $B_1 < B_2$ <---------> I_1 est plus bas que I_2.

c) Valeurs particulières de B :

(Bnul) : B est nul <---------> la droite passe par l'origine.

d) Relations particulières entre valeurs de B :

(Beg) : $B_1 = B_2$ <---------> D_1 et D_2 coupent l'axe des ordonnées au même point.

(Bop) : $B_1 = -B_2$ <---------> I_1 et I_2 sont symétriques par rapport à l'origine.

2) Cas de (P1) : $y = A x^2 + B x + C, A \neq 0$

Coefficient A : A est associé graphiquement à l'ouverture de la parabole et à son orientation. La valeur absolue de A est associée à l'ouverture et le signe de A à l'orientation de la parabole.

a) savoirs atomiques liés au signe de A : Il s'agit des savoirs sur l'orientation, liés à une seule parabole :

(Apos) : A est positif <---------> l'ouverture de la parabole est dirigée vers le haut.

(Aneg) : A est négatif <---------> l'ouverture de la parabole est dirigée vers le bas.

b) Ordre sur A : Il s'agit des savoirs, liés à plusieurs paraboles mettant en jeu la valeur de l'ouverture, A_1 et A_2 étant respectivement les valeurs de A correspondant aux paraboles P_1 et P_2 :

(AOrd) : $| A_1 | < | A_2 |$ <---------> P_2 est moins ouverte que P_1.

(AposOrd) : Lorsque A_1 et A_2 sont positifs,
$A_1 < A_2$ <---------> P_2 est moins ouverte que P_1.

(AnegOrd) : Lorsque A_1 et A_2 sont négatifs,
$A_1 < A_2$ <---------> P_2 est plus ouverte que P_1.

La distinction entre le cas positif et le cas négatif est faite pour la raison suivante : bien que l'on puisse faire l'hypothèse que la notion de valeur absolue est assimilée par les élèves au niveau du second cycle, nous supposons que la savoir (Ord A) énoncée en termes de valeurs absolues présente une difficulté spécifique au niveau cognitif. Plus précisément l'équivalence entre (Aord) et [(AposOrd) + (Anegord)] n'est pas évidente; il est possible que des élèves maîtrisent séparément AposOrd et AnegOrd sans maîtriser pour autant (AOrd), ou même maîtrisent seulement (AposOrd).

c) Relations particulières entre valeurs de A :

(Aeg) : $A_1 = A_2$ <---------> P_1 et P_2 ont même ouverture et même orientation.

(Aop) : $A_1 = -A_2$ <---------> P_1 et P_2 ont même ouverture mais des orientations opposées.

Coefficient B : L'interprétation globale de B comme pente à l'origine, basée sur la notion de dérivée, a semblé trop difficile au niveau de la classe de première et de terminale, au moins au début de l'année où s'est déroulée l'expérimentation pour être prise en compte dans les tests. Une autre possibilité pour l'interprétation de B, dans le cas de possibilité de repérage graphique, est la relation $f(x) - f(-x) = 2Bx$ (f désignant la fonction polynomiale correspondant à la parabole P); cette interprétation aussi ne semble pas très accessible non plus aux élèves à ce niveau. B s'interprète aussi comme étant l'opposé du double produit de l'abscisse du sommet de la parabole et de A. Cette interprétation de B nécessite l'observation et la coordination de deux paramètres à la fois. Elle sort donc du cadre des savoirs désignés comme atomiques. Les savoirs atomiques sur B, que nous avons retenus finalement sont les suivantes :

a) Valeurs particulières de B :

(Bnul) : B est nul <---------> le sommet de la parabole est sur l'axe des ordonnées.

b) Relations particulières entre valeurs de B :

(Beg) : Pour des valeurs égales de A, $B_1 = B_2$ <---------> P_1 et P_2 ont leurs sommets situés sur la même verticale.

(Bop) : Pour des valeurs égales de A, $B_1 = -B_2$ <---------> P_1 et P_2 ont leurs sommets sur des verticales symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Coefficient C : C est l'ordonnée du point d'intersection I de la parabole et de l'axe des ordonnées. Comme pour le premier degré, les savoirs atomiques retenus sont les suivants :

a) Signe de C :

(Cpos) : C est positif <---------> I est au dessus de l'axe des abscisses.

(Cneg) : C est négatif <---------> I est au dessous de l'axe des abscisses.

b) Ordre sur C :

(Cord) : $C_1 < C_2$ <---------> I_1 est plus bas que I_2.

c) Valeurs particulières de C :

(Cnul) : C est nul <---------> la parabole passe par l'origine.

d) Relations particulières entre valeurs de C :

(Ceg) : $C_1 = C_2$ <---------> les paraboles P_1 et P_2 passent par le même point de l'axe des ordonnées.

(Cop) : $C_1 = -C_2$ <---------> les paraboles P_1 et P_2 coupent l'axe des ordonnées en des points symétriques par rapport à O.

3) Cas de (P2) ; $y = A(x - P)^2 + Q, A \neq 0$

Coefficient A : Il s'agit des mêmes savoirs que dans le cas (P1).

Coefficients P et Q : P et Q sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du sommet de la parabole. P et Q ont le même statut que C dans le cas de P1. Ce sont les coordonnées d'un point caractéristique de la parabole. Par analogie avec C, les savoirs atomiques retenues sont donc :

(Ppos), (Pneg), (Pord), (Pnul), (Peg), (Pop), (Qpos), (Qneg), (Qord), (Qnul), (Qeg), et (Qop).

4) Cas de (P3) : $y = A (x - R) (x - S), A \neq 0$

Coefficient A : Il s'agit des mêmes savoirs que dans le cas (P1).

Coefficients R et S : R et S sont les abscisses des points d'intersection M et N de la parabole et de l'axe des abscisses. R et S ont le même statut que C. Les savoirs atomiques retenus sur R et S sont donc, encore une fois :

(Rpos), (Rneg), (Rnul), (Reg), (Rop), (Spos), (Sneg), (Snul), (Seg) et (Sop) où par exemple (Rpos) signifie : Si R est Positif, alors M ou N est à droite de O.

A ces savoirs, nous avons ajouté, puisque les paraboles de type P3 ont des points sur x'x à coordonnées entières dans le cas de la séance informatique, le savoir (IdFac) qui est le suivant : l'équation de la forme (P3) d'une parabole dont M et N ont pour abscisses x_1 et x_2 est de la forme $y= A(x-x_1) (x-x_2)$.

c) TACHES A REALISER :

Dans le logiciel, la tâche consiste à trouver une équation de la parabole tracée, c'est-à-dire trouver les valeurs exactes des coefficients. Une sous-tâche s'impose : trouver la valeur exacte d'un coefficient donné. Celle-ci à son tour peut inclure dans l'environnement d'autres sous-tâches plus simples : la distinction entre valeur exacte et valeur erronée, la comparaison de valeurs fausses elles-mêmes, en fonction de critères d'ordre, de signe et de relations particulières pour gérer efficacement les feed-back. Nous faisons donc l'hypothèse que le travail avec le logiciel peut influer non seulement sur les performances des élèves sur la tâche proposée mais aussi sur leur connaissance des savoirs atomiques que nous venons de retenir. Ces savoirs atomiques correspondent donc aux connaissances visées directement dans les tests, les questionnaires étant construits à partir de tâches simples mettant en jeu chacune une seule connaissance atomique.

Etant donné plusieurs droites D_i (ou paraboles P_i) tracées, F et F' désignant deux coefficients dans un type d'équation envisagé, F_i et F'_i leurs valeurs pour D_i (ou P_i), ces tâches sont :
- Identifier les F_i satisfaisant une propriété indiquée.
- Classer dans l'ordre certains des F_i.
- Identifier les droites (ou les paraboles) satisfaisant une relation donnée entre F_i et F'_i.
- Identifier une parabole à partir d'une équation.

Ces tâches sont conformément à ce que nous avons annoncé dans les chapitres précédents, majoritairement des tâches de passage du cadre graphique au cadre algébrique. En effet, les savoirs atomiques cités plus haut sur A, B, C, P et Q, étant des équivalences, ils sont décomposables en deux implications, l'une fonctionnant du graphique vers l'algébrique, l'autre dans le sens inverse. Les tâches proposées dans les tests mettent en fait en jeu les composantes graphique --------> algébrique de ces savoirs atomiques.

Les savoirs sur R et S sont symétriques, leur regroupement permet donc d'éviter une distinction superflue tout en gardant le même niveau de simplicité. Ainsi avons-nous remplacé les deux savoirs atomiques (Rpos) et (Spos) par (RSpos).

d) STRUCTURE DES TESTS :

A chacun des savoirs atomiques correspond une seule question. Voici dans les pages qui suivent les questionnaires du pré-test. Ceux du post-test reprennent les mêmes questions mais pour d'autres droites et d'autres paraboles.

1) Premier cycle

Les correspondances entre les questions et items des exercices proposés (cf. pages suivantes) et les savoirs atomiques sont données par les tableaux suivants :

Exercice 1	question 1	question 2
Savoirs	Aeg	Beg

Exercice 2	question 1	question 2
Savoirs	Apos (item 1)	Bpos (item 1)
Savoirs	Aneg (item 2)	Bneg (item 2)
Savoirs	Anul (item 3)	Bnul (item 3)

Exercice 3	question 1	question 2
Savoirs	Aord	Bord

Exercice 4	question 1	question 2
Savoirs	Aop	Bop

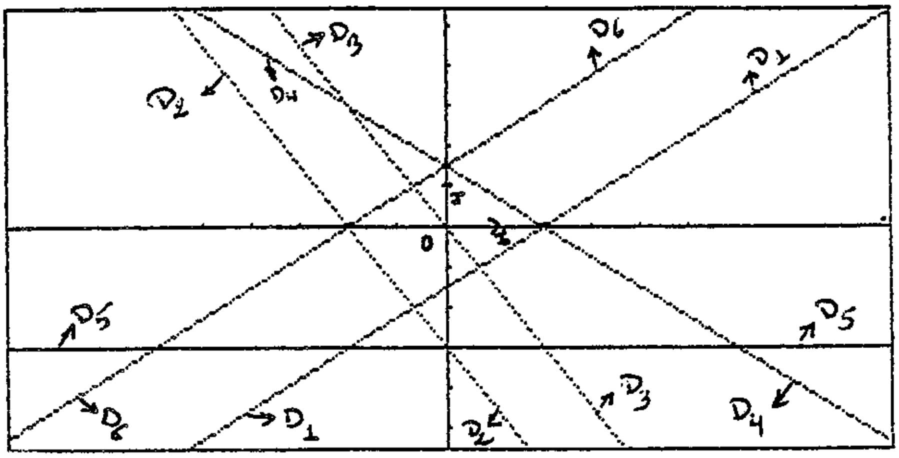
Tableau 4-1: les correspondances entres les tests et les savoirs atomiques au premier cycle.

DROITES - EQUATIONS

SUJET 1

N.B : Dans tous les exercices qui suivent, pour un entier naturel n la droite D_n a pour équation $y = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des réels.

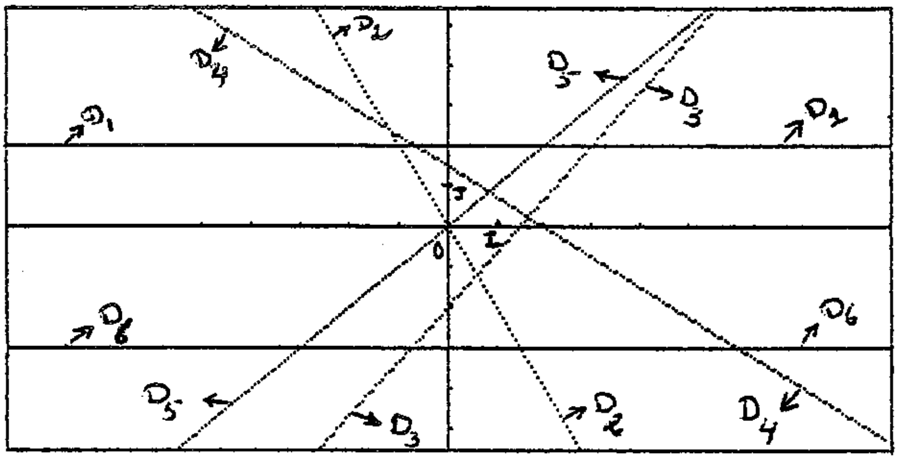
Exercice 1 :



1) Parmi les nombres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, écrire (sans les calculer) ceux qui sont égaux : ....

2) Parmi les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, écrire (sans les calculer) ceux qui sont égaux : ....

Exercice 2 :

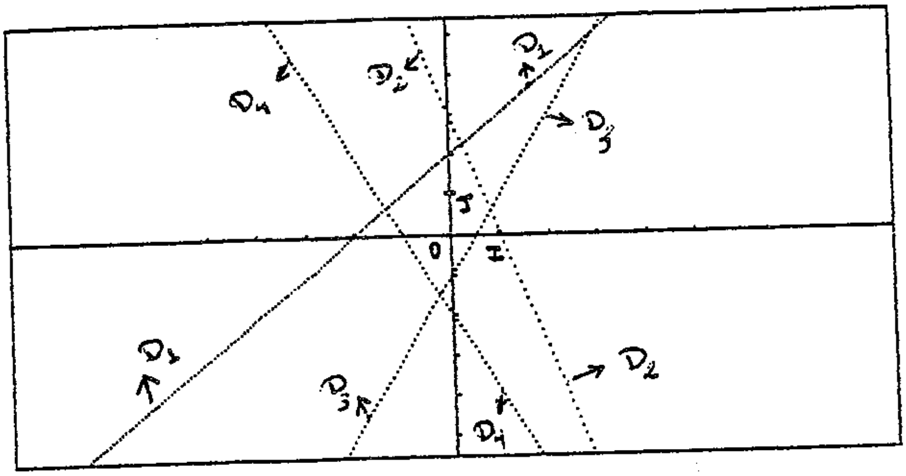


1) Parmi les nombres a, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, écrire (sans les calculer) ceux qui sont :

positifs ....
négatifs ....
nuls ....

2) Parmi les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, écrire (sans les calculer) ceux qui sont :
positifs ....
négatifs..
nuls ....

Exercice 3 :



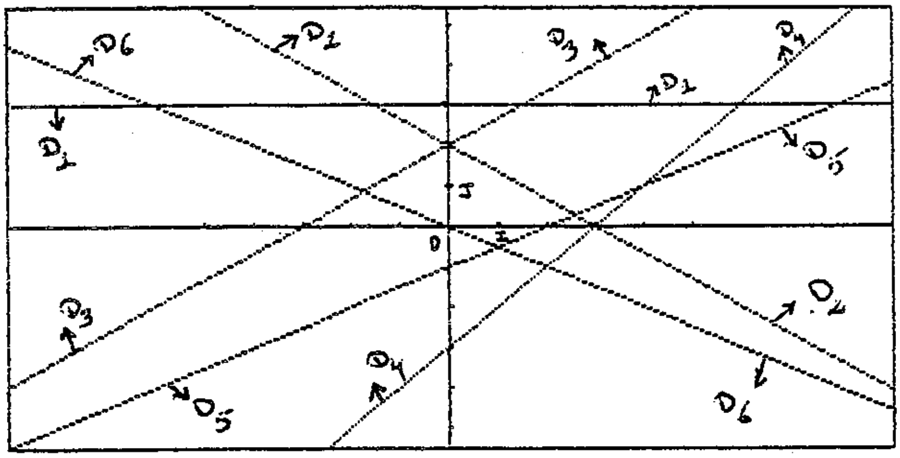
1) Classer les nombres a_1, a_2, a_3, a_4, par ordre croissant (sans les calculer) :

....

2) Classer les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, par ordre croissant (sans les calculer) :

....

Exercice 4 :



1) Parmi les nombres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, écrire ceux qui sont opposés :

....

2) Parmi les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, écrire ceux qui sont opposés :

....

2) Second cycle

Les correspondances entre les questions et items des exercices proposés (cf. pages suivantes) et les savoirs atomiques sont données par les tableaux suivants :

Exercice 1	question 1	question 2	question 3
Savoirs	Apos (item 1)	Cpos (item 1)	Bnul
Savoirs	Aneg (item 2)	Cneg (item 2)	
Savoirs	Aeg (item 3)	Ceg (item 3)	
Savoirs	Aop (item 4)	Cop (item 4)	
Savoirs		Cnul (item 5)	

Exercice 2	question 1	question 2	question 3
Savoirs	AordPos	AordNeg	Cord

Exercice 3	question 1	question 2
Savoirs	Beg[5]	Bop[6]

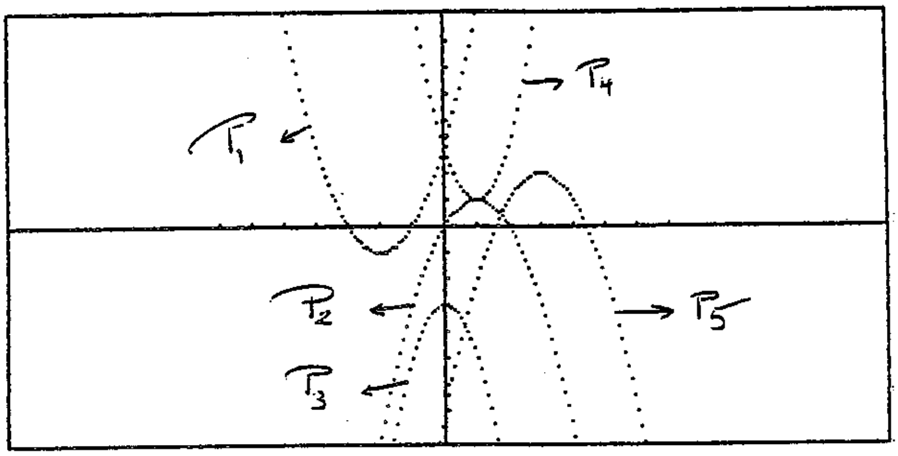
Exercice 4	question 1	question 2	question 3	question 4
Savoirs	Apos (item 1)	Aord	RSpos (item 1)	Idfac
Savoirs	Aneg (item 2)		RSneg (item 2)	
Savoirs	Aeg (item 3)		RS+-	
Savoirs	Aop (item 4)		RSeg	

Tableau 4-2 : les correspondances entres les tests et les savoirs atomiques au second cycle.

[5] Pour rendre les questions accessibles, comme on l'a précisé dans notre analyse des connaissances atomiques, l'égalité des valeurs de A est implicite.

SUJET 1 PARABOLES - EQUATIONS

Exercice 1 : Pour $i=1,2,3,4,5$, P_i est la courbe d'équation $y=A_ix^2+B_ix+C_i$.



1) Parmi les nombres A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, écrire

ceux qui sont positifs : ....

ceux qui sont négatifs : ....

ceux qui sont égaux : ....

ceux qui sont opposés : ....

2) Parmi les nombres C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, écrire

ceux qui sont positifs : ....

ceux qui sont négatifs : ....

ceux qui sont égaux : ....

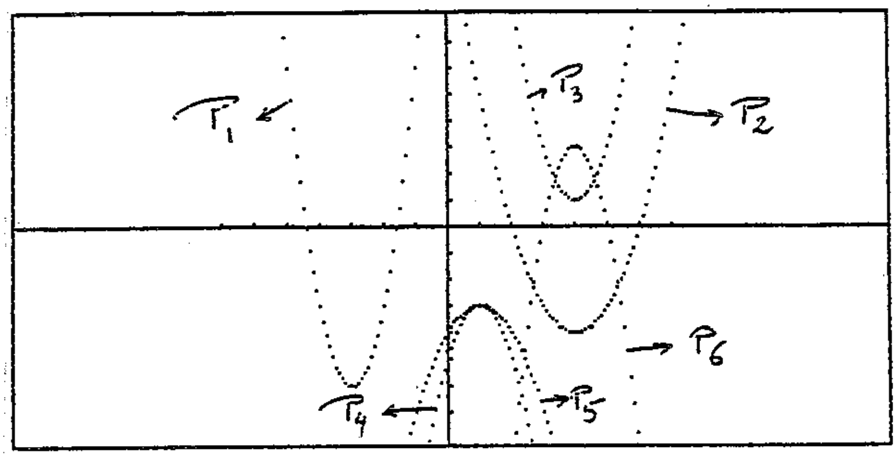
ceux qui sont opposés : ....

ceux qui sont nuls : ....

3) Parmi les nombres B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, écrire ceux qui sont nuls :

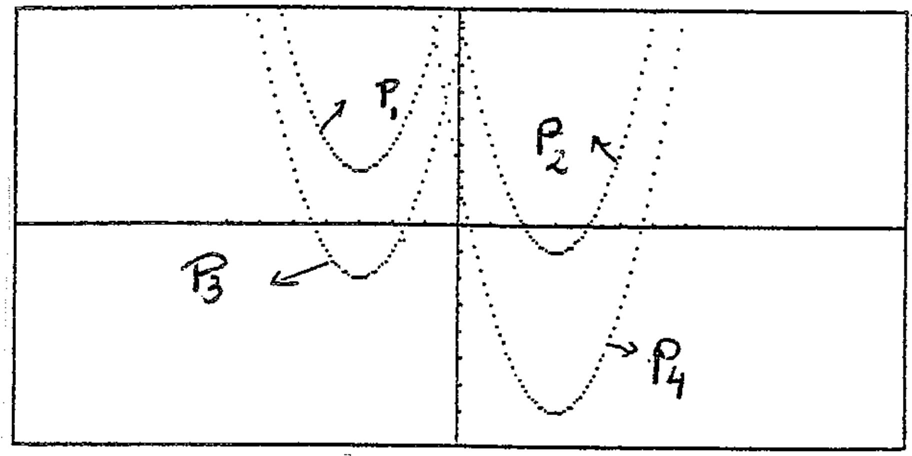
....

Exercice 2 : Pour i=1,2,3,4,5,6, $\mathbf{P_i}$ est la courbe d'équation $\mathbf{y=A_ix^2+B_ix+C_i}$.



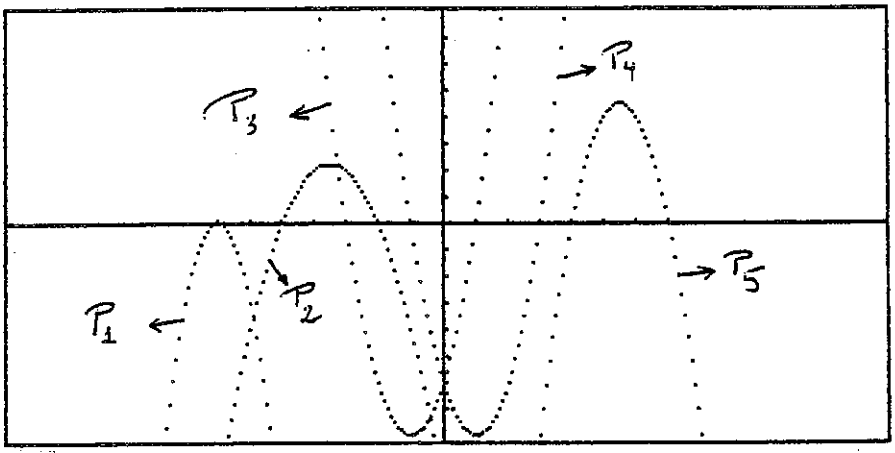
1) Ecrire dans l'ordre croissant les nombres A_1, A_2, A_3 : ....
2) Ecrire dans l'ordre croissant les nombres A_4, A_5, A_6 : ....
3) Ecrire dans l'ordre croissant les nombres C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 :
....

Exercice 3 : Pour i=1,2,3,4, $\mathbf{P_i}$ est la courbe d'équation $\mathbf{y=A_ix^2+B_ix+C_i}$.



Parmi les nombres B_1, B_2, B_3, B_4 :
1) Ecrire ceux qui sont égaux : ....
2) Ecrire ceux qui sont opposés : ....

Exercice 4 : Pour $i=1,2,3,4,5$, $\mathbf{P_i}$ est la courbe d'équation $\mathbf{y=A_i(x-R_i)(x-S_i)}$.



1) Parmi les nombres A, A_2, A_3, A_4, A_5, écrire

ceux qui sont positifs : ....

ceux qui sont négatifs : ....

ceux qui sont égaux : ....

ceux qui sont opposés : ....

2) Ecrire dans l'ordre croissant les nombres A, A_2, A_3, A_4, A_5

....

3) Pour quelles valeurs de i

R_i et S_i sont tous les deux positifs : ....

R_i et S_i sont tous les deux négatifs : ....

R_i et S_i sont de signes contraires : ....

R_i et S_i sont égaux : ....

4) Pour quelles valeurs de i, $\mathbf{P_i}$ correspond à l'équation $\mathbf{y=2(x+1)(x-3)}$

....

III-2) ORGANISATION DE LA SEANCE

A propos de l'organisation de la séance, nous avons prévu :
L'introduction du jeu et du fonctionnement du logiciel par l'enseignant, la distribution des fiches explicatives et le travail de familiarisation avec le logiciel qui consiste à faire travailler chacun des élèves sur un exercice à titre d'exemple. La séance consiste ensuite en un travail individuel d'une heure avec le logiciel. L'élève dispose d'un brouillon et ses actions informatiques sont enregistrées automatiquement.

IV) OUTILS D'ANALYSE

Nous avons déjà présenté la notion de savoir atomique et son utilisation comme outil d'analyse. Nous allons parler maintenant des autres outils : l'analyse des connaissances au vu des résultats pré-test/post-test, l'analyse a priori des stratégies des élèves en séance, des connaissances qui y sont mises en jeu ainsi que de leurs coûts, l'analyse d'un fichier d'élève, les analyses statistiques globales des résultats et l'analyse fine des travaux d'élèves.

IV-1) L'OUTIL ANALYSE DES CONNAISSANCES

Cette analyse consiste à étudier les différences entre les réussites sur les différents savoirs atomiques aux tests, et à en inférer des regroupements de savoirs permettant une analyse plus globale de l'articulation graphique/algébrique. Ces différences sont ainsi utilisées pour hiérarchiser en fonction de leur difficulté cognitive les relations entre graphique et algébrique, les résultats obtenus étant ensuite mis en rapport avec les résultats didactiques connus.

IV-2) L'OUTIL ANALYSE A PRIORI DES STRATEGIES DE RECHERCHE

Il ne s'agit pas de donner ici une liste a priori de toutes les stratégies possibles, mais de préciser celles qui nous semblent parmi les plus susceptibles d'être adoptées par les élèves. Nous faisons la distinction entre deux catégories de stratégies : stratégies par exercices et stratégies par séance. Nous étudierons ces stratégies tout d'abord au niveau du second cycle, puis au niveau du premier cycle.

A) SECOND CYCLE

Nous allons faire une description de certaines stratégies par exercice et nous allons identifier les connaissances qu'elles mettent en jeu. Nous indiquerons ensuite certaines stratégies de séance. Nous illustrerons par des exemples chacune de ces stratégies pour chacun des cas P1, P2 et P3. Nous essayerons d'évaluer, à partir de ces exemples, les coûts respectifs bien que ce coût dépende non seulement de la stratégie mais aussi des valeurs précises des coefficients et des coordonnées des points caractéristiques. Nous terminerons notre analyse en la visualisant par un tableau.

Les exercices que nous avons choisis pour illustrer les stratégies répertoriées sont les suivants :

Cas de la forme P1 :

coefficients : A = -2, B = -9, C = -7.

points à coordonnées entières : (-5 ; -12) , (-4 ; -3) , (-3 ; 2) , (-2 ; 3) , (-1;0) et (0 ; -7).

Cas de la forme P2 :

coefficients : A = 1, P = 3, Q = -4

points à coordonnées entières : (-1 ; 12) , (0 ; 5) , (1 ; 0) , (2 ; -3) , (3 ; -4) , (4; -3) , (5 ; 0) , (6 ; 5) et (7 ; 12).

Cas de la forme P3 :

coefficients : A = -1, R = -1 , S = -4

points à coordonnées entières : (-6 ; -10) , (-5 ; -4) , (-4 ; 0) , (-3 ; 2) , (-2 ; 2) , (-1 ; 0) , (0 ; -4) et (1 ; -10).

a) Stratégies par exercice

1) Stratégies ponctuelles : Nous appelons stratégies ponctuelles celles qui sont basées sur l'utilisation exclusive et explicite des coordonnées des points dans la recherche des coefficients

- Stratégie ponctuelle de base : Elle consiste à relever les coordonnées de 3 points de la parabole, et à écrire en respectant la forme d'équation dont il faut trouver les coefficients, un système de 3 équations à 3 inconnues dont la résolution donne les coefficients cherchés.
Cette stratégie présente une variante plus économique consistant à utiliser systématiquement des points à coordonnées entières.

exemples :

P1 :

Les points (-4 ; -3) , (-3 ; 2) et (-2 ; 3) permettent écrire le système linéaire :

$$\begin{cases} -3 = 16\,A - 4\,B + C \\ 2 = 9\,A - 3\,B + C \\ 3 = 4\,A - 2\,B + C \end{cases}$$

qui est théoriquement à la portée des élèves de ce niveau et dont la résolution se fait, par exemple, par combinaison linéaire d'équations.

P2 :

Les points (2 ; -3), (3 ; -4) et (6 ; 5) permettent écrire le système :

$$\begin{cases} -3 = A(2-P)^2 + Q \\ -4 = A(3-P)^2 + Q \\ 5 = A(6-P)^2 + Q. \end{cases}$$

Il ne s'agit plus d'un système linéaire. Il est théoriquement possible de se ramener à un système plus simple par combinaison linéaire équations et par substitution[1].

P3 :

Les points (-6 ; -10) , (-5 ; -4) , (-3 ; 2) permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} -10 = A(-6-R)(-6-S) \\ -4 = A(-5-R)(-5-S) \\ 2 = A(-3-R)(-3-S). \end{cases}$$

Système qui n'est pas linéaire et qui peut être ramené à un système linéaire par changement d'inconnues $X = RS$ et $Y = R+S$[2].

- Stratégie ponctuelle élaborée : Selon cette stratégie l'élève exploite, de la même façon dans les 3 cas P1, P2 et P3, les coordonnées de 3 points sur les axes. D'où un système d'équations simplifié et une résolution plus facile.

Exemples:

P1 :

Les points (-2 ; 3), (-1 ; 0) et (0 ; -7) permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} -7 = C \\ 0 = A - B + C \\ 3 = 4A - 2B + C. \end{cases}$$

Ce système peut être ramené à un système à 2 équations à deux inconnues puisque C est déterminé directement.

P2 :

Les points (0 ; 5), (1 ; 0) et (5 ; 0) permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} 5 = A(0-P)^2 + Q \\ 0 = A(1-P)^2 + Q \\ 0 = A(5-P)^2 + Q. \end{cases}$$

---

1 Mais on peut faire raisonnablement l'hypothèse qu'un tel traitement autonome reste hors de portée de la majorité des élèves.

2 Même problème de complexité que pour P2.

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 5 = AP^2 + Q \\ 0 = A - 2\,AP + AP^2 + Q \\ 0 = 25\,A - 10\,AP + AP^2 + Q \end{cases}$$

qui n'est autre que :

$$\begin{cases} 5 = AP^2 + Q \\ 0 = A - 2\,AP + 5 \\ 0 = 25\,A - 10\,AP + 5 \end{cases}$$

dont les deux derinères équations constituent un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et AP.

Ici le système est donc un peu plus simple que celui résultant de la stratégie ponctuelle brute.

P3 :
(0 ; -4), (-5 ; -4), (-3 ; 2) permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} -4 = A\,(0 - R)\,(0 - S) \\ -4 = A\,(-5 - R)\,(-5 - S) \\ 2 = A\,(-3 - R)\,(-3 - S). \end{cases}$$

Système dont la résolution est un peu plus facile puisque, par exemple, il s'agit d'un système qui peut être ramené, par changement de variables $X = R.S$ et $Y = R + S$, à un système de deux équations à deux inconnues Y et A (puisque $X = -4/A$).

Notons que pour P1 et P2, à part l'intersection avec l'axe des ordonnées, il n'y a pas nécessairement d'autres intersections entières avec les axes.
La stratégie ponctuelle élaborée n'est donc pas toujours possible.

- <u>Stratégie ponctuelle élaborée adaptée au type d'équation</u> : C'est la stratégie qui consiste, à lire la valeur de C dans P1, et à résoudre le système de deux équations à deux inconnues que l'on obtient en exploitant les points, s'ils existent, sur l'axe des abscisses dans le cas de P1, à lire les valeurs de P et Q ou de R et S et à résoudre l'équation que l'on obtient en utilisant les coordonnées d'un troisième point pour trouver la valeur de A dans le cas de P2 ou dans le cas de P3.
Cette stratégie n'est pas forcement identifiable à partir de la résolution d'un seul exercice.

P1 :
La lecture de la valeur -7 de C et les 2 points (-2 ; 3) et (-1 ; 0) permettent écrire le système :

$$\begin{cases} C = -7 \\ 0 = A - B - 7 \\ 3 = 4\,A - 2\,B - 7 \end{cases}$$

Cette stratégie diffère de la précédente par la lecture graphique de C.

P2 :

La lecture graphique des valeurs de P et Q à partir du sommet et le point (1 ; 0) permettent écrire :

$$\begin{cases} P = 3 \\ Q = -4 \\ 0 = A\,(1-3)^2 - 4 \end{cases}$$

d'où A.

P3 : La lecture graphique de R et S et le point (-2 ; 2) permettent écrire :

$$\begin{cases} R = -1 \\ S = -4 \\ 2 = A\,(-2+1)\,(-2+4) \end{cases}$$

d'où A.

Notons enfin qu'il peut y avoir dans les cas P2 et P3, une stratégie ponctuelle qui consiste à trouver d'abord l'équation sous la forme P1 puis, l'équation sous la forme P2 ou P3 par changement d'expression. Cette stratégie peut être attendue au moins pour P2 puisque les élèves sont entrainés à la mise sous forme canonique. Pour l'autre forme, il faut aller jusqu'à trouver les racines, ce qui est moins automatique : la liaison entre la recherche des racines et la factorisation n'est peut-être pas vraiment disponible.

2) <u>Stratégies globales</u> : Ce sont les stratégies de recherche par interprétation globale (cf. Duval) qui <u>ne recourent à l'exploitation des coordonnées que par lecture directe c'est-à-dire non par le biais d'équations.</u>

- <u>Stratégie globale lecture/estimation</u> : Il s'agit de la stratégie qui adopte une démarche de lecture graphique de certains coefficients suivie d'une estimation des coefficients non directement lisibles. Cette stratégie consiste à :

lire C et estimer A et B ,sauf dans des cas particuliers, dans le cas de P1.

lire P et Q et estimer A, dans le cas de P2.

lire R et S et estimer A, dans le cas de P3.

Une proposition de réponse est alors possible. Le tracé correspondant à une proposition et la comparaison des paraboles permettent de corriger les coefficients estimés. Dans le cas de P1, C étant connu, pour trouver A et B deux voies sont possibles :

i) des propositions qui changent, de façon organisée, un à un ces deux coefficients,

ii) des essais inorganisés sur A et B ensemble.

Dans les trois cas, il est impossible de savoir le nombre de propositions nécessaires.

Exemples :
dans le cas de P1:

C = -7	A = -1	B = 5
C = - 7	A = - 2	B = 5
C = - 7	A = - 2	B = - 5
C = - 7	A = - 2	B = - 7.

dans le cas de P2 :

P = 3	Q = -4	A = -2
P = 3	Q = -4	A = 2
P = 3	Q = -4	A = 3
P = 3	Q = -4	A = 1.

dans le cas de P3 :

R = -1	S = -4	A = -2
R = -1	S = -4	A = -2
R = -1	S = -4	A = -3
R = -1	S = -4	A = -1

Notons que dans le cas de P1, il est très difficile d'aboutir à la valeur exacte de B par des estimations et feed-back.

- Stratégie par tâtonnement : c'est la stratégie de recherche des coefficients par tâtonnement global (tous les coefficients à la fois). Une variante : la stratégie d'essai/erreur. Elle consiste à faire des essais de réponses, à observer les tracés et les messages qui accompagnent le traitement de ces réponses, jusqu'à obtenir la bonne réponse. Il s'agit d'essais plus ou moins organisés suivant la prise en compte ou non des feed-back et les connaissances engagées.

exemples : des essais de réponses globales conduisent à émettre des conjectures[3] et à les tester. Le tâtonnement peut être plus ou moins organisé mais cette.organisation n'est pas forcément inférable à partir des données.

Exemple 1 :[4]

P3 :	1	-2	2	Parabole	1(x + 2) (x - 2)
R :	-4	-2	2		
R :	4	2	0		
R :	4	2	2		

Exemple 2 :

[3] Il est évident que cette démarche n'est pas facilement inférable à partir des données recueillies.

[4] Dans cet exemple on voit en première ligne les coefficients correspondant à la forme P3 de la parabole tracée. L'élève fournit trois réponses(désignées par la lettre R) et les valeurs données sont, dans l'ordre, pour A, R et S.

P3 :	1	-4	-1	Parabole	1(x + 4) (x +1)
R :	-7	-5	-1		
R :	6	4	-1		
R :	2	-2	-1		

Deux variantes de cette stratégie sont envisageables :

i) Par tâtonnement global contrôlé par l'option tracé : les tracés permettent la validation des réponses supposées et la prise en compte des feed-back. Cette variante utilise uniquement l'option tracé jusqu'à obtention de la réponse juste.

exemple : (la lettre T désignant un tracé)

P1 :	-1	-2	-2	Parabole $- x^2 - 2x - 2$
T :	-2	2	2	
T :	-2	-2	-2	
T :	-3	-2	-2	
R :	-1	-2	-2	

ii) Par tâtonnement coefficient par coefficient. Cette variante utilise soit le mode réponse, soit le mode tracé. Dans ce dernier cas, elle suppose la capacité à reconnaître qu'on a gagné sur un coefficient, à moins que la variable validation partielle du logiciel ne soit activée.

exemple :

P1 :	-2	6	-5	Parabole $-2x^2 + 6x - 5$
R :	-3	5	7	
R :	-3	5	-6	
R :	-3	5	1	

Les connaissances et les savoir-faire mis nécessairement en jeu, dans toutes les stratégies ponctuelles, sont : interprétation algébrique de l'appartenance d'un point à une parabole et résolution d'un système d'équations.
De plus, d'autres connaissances et compétences sont spécifiques à la stratégie ponctuelle élaborée adaptée au type d'équation. Il s'agit des interprétations graphiques des coefficients C, P, Q, R et S.

En général, les stratégies essai/erreur ne mettent pas nécessairement de connaissances spécifiques en jeu. A propos des stratégies globales dès que l'on sort du pur tâtonnement les interprétations graphiques de tous les coefficients impliqués, sauf peut-être de B, entrent en jeu, en particulier lorsqu'il s'agit de lecture/estimation.

b) Stratégies sur séance

1) Stratégies stables : Ce sont les stratégies de recherche adoptées systématiquement sur toute la séance indépendamment de l'expérience acquise pendant la séance.

2) Stratégies évolutives : Ce sont les stratégies qui évoluent positivement lors de la séance. Nous faisons l'hypothèse qu'elles sont la preuve d'une adaptation visant à optimiser certains critères : le temps, les coûts, l'efficacité et qu'elles traduisent un apprentissage.

Nous sommes conscient qu'il sera difficile de modéliser systématiquement les comportements des élèves en termes de ces stratégies. Voici, par exemple, un travail d'élève sur un exercice de type P1 où il nous semble impossible d'identifier une stratégie :

C :	(0 ; -7)[5]		
T :	A = -2	B = 4	C = 5
T :	A = 3	B = 2	C = -3
C :	(- 1; 0)		
R :	A = 3	B = 1	C = 2.

Il ne s'agit d'aucune des stratégies ponctuelles puisqu'un seul couple de coordonnées est demandé et que l'option T est utilisée. Il ne s'agit pas non plus d'une stratégie lecture/estimation parce qu'elle n'utilise pas une lecture de C qui est -7. Nous ne pouvons pas dire non plus qu'il s'agisse de la stratégie essai/erreur parce qu'elle utilise des coordonnées.

c) Coûts des stratégies

Comprendre les choix et les évolutions stratégiques des élèves ne peut se faire sans effectuer une étude des coûts de ces stratégies.
Pour un exercice, nous considérons que le coût théorique d'une stratégie est fonction de 3 composantes : coût calculatoire, coût en connaissances et coût informatique. Le coût calculatoire est lié à la quantité de calculs à effectuer, au niveau de complexité de ces calculs et au temps nécessaire de mise en oeuvre de cette stratégie, le temps étant une conséquence de la complexité et de la quantité des calculs. Le coût en connaissances est lié à la disponibilité de ces connaissances. Le coût informatique est lié selon le cas, soit au nombre de coups prévisible, soit au système de tarification des actions. Dans la suite, le coût informatique sera référé à l'option gestion d'un capital de points. Les coûts des actions seront notés : c points pour l'affichage des coordonnées d'un point, t points pour un tracé et r points pour une réponse

[5] C : (0 ; -7) indique que l'élève a affiché les coordonnées du point (0;-7) de la parabole tracée.

fausse. Le coût effectif dépend aussi de l'exercice puisqu'il est évident que, suivant la valeur des coefficients de l'exercice proposé, le coût peut varier pour une même forme.

Pour qu'une stratégie soit accessible à un élève, il faut que ses coûts calculatoire et en connaissances soient compatibles avec les coûts supportables par l'élève. Pour qu'elle soit gagnante, il faut qu'elle permette d'aboutir à un coût informatique inférieur au coût maximum autorisé. La possibilité, offerte par le logiciel, de modifier la définition de ce coût informatique, fournit des variables pour modifier l'optimalité de telle ou telle stratégie.
Compte tenu de l'enseignement usuel et des rapports qu'il institue entre cadre algébrique et cadre graphique, on peut estimer que les stratégies ponctuelles sont les plus accessibles au niveau connaissances du domaine. Mais en fait, excepté dans le cas P1, la stratégie ponctuelle de base et ses variantes sont disqualifiées par leur coût calculatoire démesuré.
Le coût informatique étant la seule composante aisément mesurable du coût d'une stratégie, on voit d'emblée la difficulté d'élaborer un système d'évaluation des coûts.
L'essentiel pour nous ne sera donc pas d'évaluer, au sens strict du terme, ces coûts mais plutôt de trouver un moyen qui nous permette, si possible, de classer approximativement ces stratégies en fonction de leur coût supposé.

Dans la suite, en ce qui concerne le coût calculatoire, la quantité de calculs sera "mesurée" en nombre d'équations mises en jeu par cette stratégie, la complexité des calculs en termes de complexité de ces équations en supposant les lectures directes des coefficients sans coût. Le coût en connaissances sera défini par les connaissances elles-mêmes.
Mais si une telle évaluation du coût est envisageable dans le cas des stratégies ponctuelles et encore pour les stratégies globales lecture/estimation, elle devient quasiment impossible pour les stratégies de tâtonnement essai/erreur.

1) Stratégies par exercice

- Stratégies ponctuelles : dans toutes ces stratégies, l'élève disposera en général d'un système de 3 équations dont il tire par résolution les coefficients cherchés. Le coût informatique minimum est 3c. Le coût connaissances est : savoir écrire une équation exprimant le fait qu'un point appartient à une parabole et savoir résoudre le système obtenu.

i) Stratégie ponctuelle brute : Sauf cas très particulier, la solution du système obtenu n'est pas, en général, évidente. Dans le cas de P2 et P3 le coût calculatoire ainsi que le coût en connaissances se trouvent énormément accrus.
Pour les variantes de cette stratégie, les coordonnées entières permettent de réduire le système initial.

ii) Stratégie ponctuelle élaborée : selon cette stratégie le coût pour P1 est presque le même que pour la stratégie précédente. Dans les deux autres cas, les points particuliers utilisés donnent, lorsqu'il s'agit des points sur les axes, un système d'équations tel que $5=A(0-P)^2+Q$ et $-4=(0-R)(0-S)$ dont la recherche de la résolution n'est réellement moins difficile que pour P3 puisque RS est alors directement déterminé. Le coût calculatoire reste complexe pour P2 et P3.

iii) Stratégie ponctuelle élaborée adaptée au type d'équation : dans le cas de P1, le coût calculatoire ne change pas, le coût en connaissances augmente de celui de savoir lire directement les coordonnées d'un point et de savoir interpréter graphiquement le coefficient C, le coût informatique minimum devient 2c. Dans les autres cas, il s'agit de résoudre une seule équation du premier degré à une seule inconnue telle que $0=A(1-3)^2-4$ ou $2=A(-2+1)(-2+4)$, le coût informatique minimum est c, le coût calculatoire est réduit au minimum, le coût en connaissances s'accroit de la capacité de lecture des coordonnées d'un point et de l'interprétation graphique du sommet ou des points d'intersection avec l'axe des abscisses, selon le cas. Il est clair que si l'on veut favoriser l'évolution vers une stratégie élaborée, on peut jouer sur la tarification de C.

En résumé, le coût informatique est en principe raisonnable (si l'élève arrive à pointer ce qu'il veut) et dépend du nombre de points à coordonnées entières et du nombre de points sur les axes. Le coût calculatoire est très lourd et inaccessible pour P2 et P3 sauf dans la stratégie élaborée adaptée au type, mais alors le coût en connaissances augmente et c'est ce coût qui devient le coût essentiel.

2) Stratégies globales : Ce sont des stratégies de recherche qui ne nécessitent pas de résolution d'équations et de ce fait sont, en général, plus rapides que les autres, dans le sens où la succession des coups est plus rapide[6]. Il est très difficile d'estimer leur coût a priori.

i) Stratégie lecture/estimation : Il s'agit d'une stratégie dont le coût calculatoire est nul et le coût en connaissances celui de la stratégie ponctuelle adaptée au type équation mais dont le coût informatique dépend du nombre de coefficients à estimer et par suite du type de l'équation. Dans les trois cas il s'agit d'estimer A. Il nous semble que l'estimation de A devient facile s'il existe une certaine familiarité avec les ouvertures de parabole qui correspondent aux valeurs habituellement utilisées de A comme c'est le cas dans le logiciel (entre -10 et 10). Cette estimation peut être économisée si elle intègre des connaissances sur le signe, la taille et l'ordre. Si le signe est connu, il faut compter trois ou quatre coups pour balayer par dichotomie les valeurs entières possibles entre 0 et 10 et trouver la taille. Le cas de B dans P1 présente plus de difficultés si B est non nul et le coût informatique est très grand et difficile à estimer si on joue sur les deux coefficients à la fois.
Le coût informatique de cette stratégie peut être minimisé par deux facteurs : l'expertise et le contrôle par l'option tracé (dans le cas où le tracé coûte moins qu'une réponse fausse) des estimations.[7]

ii) Stratégie essai-erreur brute : C'est une stratégie à haut risque. Son coût calculatoire est nul, son coût en connaissances est aussi nul. Il est difficile d'évaluer son coût informatique mais l'expérience montre que, en général, elle est très gourmande et rarement gagnante. Les dépenses qu'elle nécessite peuvent être minimisées, surtout à long terme, par ses variantes.

---

[6] Ce qui ne veut pas dire qu'elles aboutissent plus vite.

[7] Le coût est différent en fonction des connaissances mais il est raisonnable d'estimer le coût informatique minimum à 4t, t étant le coût informatique correspondant à un tracé.

Dans la variante de tâtonnement global on risque de ne jamais arriver au résultat. Dans le tâtonnement coefficient par coefficient, en l'absence de la validation partielle, on est confronté au problème de la reconnaissance de la réussite. Le jeu sur un seul coefficient constitue cependant, semble-t-il, une condition nécessaire pour la réussite en tâtonnement. On voit là, l'intérêt du jeu sur la variable validation partielle pour disqualifier cette stratégie.

Les tableaux que nous donnons ci-après résument cette analyse des coûts en précisant les coûts calculatoire, en connaissances et informatique de chaque stratégie.

Stratégie	Type d'équations et nombre	Complexité du système / nombre de coefficients à estimer
Ponctuelle brute	3 équations à 3 inconnues. Système linéaire pour P1, non linéaire pour P2 et P3	complexité dépendant du type. 3 coefficients
Ponctuelle élaborée	éventuellement moins de 3 équations	système simplifié surtout pour P1. 3 coefficients
Ponctuelle élaborée adaptée au type	système linéaire 2x2.pour P1. Une seule équation pour P2 ou P3	système très réduit. 2 coefficients pour B1 1 pour P2 ou P3
Estimation-lecture	∅	2 coefficients pour P1 et 1 pour P2 ou P3
essai-erreur brute	∅	∅

Tableau 4-3 : coûts calculatoires des stratégies.

Stratégie	Coût informatique
Ponctuelle brute	3c au minimum
Ponctuelle élaborée	3c au minimum
Ponctuelle élaborée adaptée au type	2c au minimum pour P1 et c au minimum pour P2 ou P3
Estimation-lecture	grand, difficile à estimer pour P1et inférieur à 4t ou 4r pour P2 et P3.
essai-erreur brute	grand et difficile à estimer

Tableau 4-4 : coûts informatiques des stratégies.

Stratégie	Connaissances
Ponctuelle brute	compétences algébriques hors de portée en cas de P2 ou P3 : - écriture d'une équation - résolution d'un système linéaire pour P1, non linéaire pour P2 et P3
Ponctuelle élaborée	compétences algébriques hors de portée en cas de P2 ou P3 : - écriture d'une équation - résolution d'un système linéaire plus réduit pour P1, non linéaire hors de portée pour P2 et P3
Ponctuelle élaborée adaptée au type	compétences algébriques de niveau élémentaire et sens pour les coefficients - écriture d'une équation - résolution d'un système simple ou d'une équation -interprétation des coefficients liés à des coordonnées de points : 1 pour P1,2 pour P2 et P3.
Estimation-lecture	compétences au niveau de l'interprétation des coefficients -interprétation des coefficients liés à des coordonnées de points : 1 pour P1,2 pour P2 et P3 - interprétation du coefficient A
essai-erreur brute	$\varnothing$

tableau 4-5 : coûts en connaissances des stratégies

B-2) PREMIER CYCLE

Il s'agit des stratégies qui nous semblent parmi les plus susceptibles d'être adoptées par les élèves dans le cas de fonction du premier degré. Comme nous l'avons fait dans le cas du second cycle, nous faisons la distinction entre deux catégories de stratégies : stratégies par exercice et stratégies par séance. En ce qui concerne l'étude du coût de ces stratégies, la question de trouver l'équation d'une droite à partir de 2 points constitue une question centrale en classe de troisième, et la maîtrise des techniques calculatoires associées est un des objectifs majeurs de cette activité. Nous inclurons donc dans les connaissances mises en jeu par ces stratégies, des connaissances clés pour ces techniques. Nous faisons l'hypothèse que le coût calculatoire des stratégies est toujours à la portée des élèves, si les connaissances clés qui leur sont associées sont disponibles. Nous n'inclurons pas cette composante dans l'étude de coûts et nous envisagerons un système de tarification "indulgent", ce qui rend le coût informatique non élevé. Le coût sera donc pratiquement réduit à la composante coût en connaissances. Nous indiquerons les connaissances fondamentales mises en jeu, directement, par chacune de ces stratégies. Nous commençons par donner la liste de ces connaissances.

0) Catalogue des connaissances

- Connaissances de base communes aux différentes stratégies :

c01) Une équation d'une droite non parallèle à y'y est : $y=Ax+B$ où A et B sont 2 réels non tous les deux nuls.

c02) Deux réels non tous les deux nuls suffisent pour déterminer une droite.

- Connaissances spécifiques :

c0) Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

c1) Interprétation algébrique de l'appartenance d'un point de coordonnées $(x_0;y_0)$ à une droite.

c2) Résolution d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

c3) Une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1;y_1)$ et $(x2 ; y2)$ est : $(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

c4) Traitements élémentaires des équations du premier degré.

c5) Le coefficient directeur A de la droite passant par les points de coordonnées $(x1 ; y1)$ et $(x2 ; y2)$ est $A = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

c6) B est l'ordonnée de l'intersection de la droite avec l'axe y'y.

c7) A est le rapport de l'ordonnée à l'abscisse d'un vecteur directeur.

c8) A est la variation Δy associée à une variation Δx égale à 1.

1) Stratégies par exercice

1-a) Stratégies ponctuelles

i) Stratégie ponctuelle de base : Elle consiste à relever les coordonnées $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ de 2 points de la droite et à trouver A et B de l'une des façons suivantes :

- écrire un système de 2 équations à 2 inconnues dont la résolution donne les coefficients cherchés.

Connaissances : c1 et c2.

- écrire l'équation de la droite est $(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, et la mettre sous la forme $y = A x + B$, ce qui fournit A et B.

Connaissances : c3 et c4.

- écrire que $A = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ et que B est racine de $y1 = A x_1 + B$ ou $y_2 = A x_2 + B$.

Connaissances : c1 et c5.

Cette stratégie présente une variante plus économique consistant à utiliser systématiquement des points à coordonnées entières.

ii) Stratégie ponctuelle élaborée : C'est la stratégie précédente utilisant le point sur y'y et la substitution ou le calcul pour trouver A.

Connaissances : c6 et c5 ou c6 et c0 et c1.

Une variante a priori de cette stratégie consiste à lire l'ordonnée b du point d'intersection avec y'y et l'abscisse a du point d'intersection avec x'x, à utiliser la formule $x/a + y/b = 1$ et à transformer équation obtenue en $y = A x + B$.

Connaissance : c6, c0, c1, c4 et la formule $x/a + y/b = 1$.

Mais d'une part, cette stratégie n'est pas toujours possible parce que a n'est pas toujours lisible (parce que pas toujours entier) et d'autre part la formule n'est pas, en général, connue des élèves de troisième (cf. [Schoenfeld et al., 1991]).

Ces stratégies exigent donc des compétences algébriques.

1-b) Stratégies globales :

i) Stratégie globale de lecture : Lecture de A et B.

Connaissances : c6 et c7 ou c6 et c8.

ii) Stratégie globale lecture/estimation :

Lecture de A et estimation de B. Connaissances : c7 ou c8.

Lecture de B et estimation de A. Connaissances : c6.

iii) Stratégie par essai/erreur : C'est la stratégie de recherche des coefficients par tâtonnement.

Deux variantes de cette stratégie sont envisageables:

- Par tâtonnement global mais contrôlé par l'option tracé.
- Par tâtonnement organisé coefficient par coefficient.

Les stratégies globales exigent des capacités d'observation, d'inspection graphique et des compétences au niveau de la signification des coefficients pour aboutir et de ce fait elles paraissent mieux adaptées à l'aide à la construction des savoirs atomiques lorsqu'elles aboutissent à la réussite parce que on sait d'après diverses recherches (cf [Duval, 1988] en particulier) que le calcul ne suffit pas à charger de sens les coefficients.

Notons au sujet des stratégies par séance, que les stratégies stables sont des stratégies de recherche adoptées systématiquement sur toute la séance indépendamment de l'expérience acquise pendant la séance et que les stratégies évolutives sont les stratégies qui évoluent positivement lors de la séance.

Précisons enfin que les stratégies identifiées par cette analyse sont observables (même si c'est difficilement) dans un environnement usuel. Elles sont plus difficilement observables dans notre environnement informatique où les informations recueillies automatiquement ne portent que sur les actions logicielles de l'élève. Nous verrons dans la partie II du chapitre suivant comment nous avons regroupé les observables logiciels dans des Tactiques directement et automatiquement repérables et comment nous avons essayé de remonter de ces tactiques aux stratégies effectives des élèves.

IV-3) L'OUTIL ANALYSE DU FICHIER ELEVE

Les fichiers qui contiennent les informations sur la séance seront étudiés et analysés. Dans la partie suivante nous allons présenter la méthode d'analyse d'un fichier de travail. L'analyse est faite à partir d'une grille rassemblant certaines caractéristiques du fichier.

LA GRILLE D'ANALYSE

a) Objectifs : La grille doit nous permettre de disposer d'un outil d'analyse pour reconstituer les grandes lignes du travail de l'élève lors de la séance informatique. Bien que nous soyons conscient du fait qu'il ne peut s'agir que d'une image très partielle, nous espérons pouvoir, à partir de cette grille, fournir un compte-rendu résumé de la séance et élaborer un profil de l'élève.
Au delà de ces deux objectifs, la grille servira aussi d'élément de base du cahier de charges du module "Analyse du travail de l'élève" qui sera intégré, ultérieurement, au logiciel.

b) Elaboration : La grille doit fournir deux types d'informations : des informations brutes sur la séance qui permettent une présentation globale de surface et des informations synthétiques qui résultent d'un premier traitement de certaines informations brutes et permettent une interprétation plus interne du travail de l'élève. En d'autre termes, la grille doit intégrer des faits et des inférences de ces faits.

Au niveau des informations "faits" recueillies dans le fichier, il y a celles qui sont globales (les types d'équations traités, le nombre d'exercices traités par type, le nombre de paraboles rencontrées par type, le nombre global de paraboles rencontrées, le nombre global d'exercices traités, le nombre total d'exercices réussis), et il y a celles qui sont locales et concernent chaque exercice (le type équation, les coefficients de la parabole tracée, les actions effectuées, les coefficients des tracés demandés, les coordonnées affichées, les réponses fournies, la réussite et l'échec).

Au niveau des informations inférées, nous nous intéressons surtout à celles qui permettent de répondre aux 2 questions suivantes :

- Comment, dans son travail, se situe l'élève par rapport aux connaissances sur les relations parabole-équation ou droite-équation précédemment identifiées ? Y a-t-il une évolution au cours de la séance ?

- Y a-t-il des stratégies de recherche dans la séance qui se manifestent, si oui, lesquelles et comment évoluent-elles ?

En ce qui concerne les connaissances manifestées et leur évolution nous faisons les remarques suivantes :

1) Les connaissances à repérer (cf. Analyse a priori des connaissances sur les fonctions du premier et du second degrés au sujet des relations entre cadre graphique et cadre algébrique) sont constituées de connaissances sur des savoirs atomiques relatifs à des propriétés de signe,taille, ordre des coefficients. Dans les questionnaires, d'une façon générale, chaque question est associée à un savoir atomique. Il suffit donc étudier les réponses à ces questions pour pouvoir repérer les manifestations de ces connaissances. Dans la séance, le problème est différent. En effet, la tâche est différente : il s'agit de trouver l'équation d'une parabole, c'est-à-dire de trouver les valeurs des coefficients de l'équation. Or la tâche qui consiste à trouver la valeur exacte d'un coefficient n'est pas liée uniquement, en général, aux seuls savoirs atomiques. Sur un exercice, de manière générale, il n'est donc pas pertinent de repérer, les connaissances atomiques, uniquement à partir des réponses à la question initiale.

2) Dans le traitement de la question, l'élève qui dispose d'outils d'aide, à savoir les options C, T et R, développe une certaine procédure dont une première identification peut se faire en termes de ces options. La détection de ces options et de leurs paramètres, peut fournir une information sur les connaissances de l'élève.
En fait une procédure de résolution n'utilisant que C pour une recherche des coefficients, uniquement algébrique ne nous renseigne pas, de façon sûre, sur les connaissances identifiées précédemment du fait qu'elle ne les met pas nécessairement en jeu. Nous faisons l'hypothèse que dans les autres procédures en revanche, certains de ces savoirs sont en jeu. C'est donc dans le cas de ces autres procédures que nous allons déterminer un moyen d'identification des connaissances sur des savoirs atomiques.

3) Certaines entrées de l'élève, dans la séance, peuvent donc apporter des informations sur l'état des connaissances sur les savoirs atomiques au moment de cette entrée. Ces entrées sont les coefficients d'un tracé à faire ou d'une réponse fournie. Dans la suite de cette partie ces entrées informatives T et R seront désignées tout court par entrées.

4) Pour un savoir atomique associé à un coefficient sur lequel on veut repérer les connaissances manifestées[8] par l'élève lors de la séance, on peut en regardant le paramètre d'entrée qui le concerne, savoir si l'élève a manifesté une connaissance ou pas. Ceci nous permet de parler d'état des connaissances, relatif à un savoir, au moment d'une entrée. Cet état peut avoir deux valeurs : 1 pour connaissance manifestée et 0 pour connaissance non manifestée.

5) La suite des valeurs de l'état des connaissances relatif à un savoir atomique en toutes les composantes entrées qui le concernent, sur tout un exercice, nous permet de parler de niveau de connaissance, relatif à ce savoir, sur cet exercice. Ce niveau, sur un savoir, dont la variable état des connaissances est notée ETAT, aura les valeurs 1,2,3 ou 4 :

1	si ETAT = 1 sur tout l'exercice.
2	si l'exercice se termine par ETAT = 1.
3	si sur l'exercice tantôt ETAT = 1, tantôt ETAT = 0.
4	si sur tout l'exercice ETAT = 0.

6) L'évolution dans la séance du niveau de connaissance relatif à un savoir d'un exercice à l'autre nous permet de parler d'évolution des connaissances sur ce savoir pendant la séance.

7) L'évolution, pendant la séance, des connaissances relatives à tous les savoirs atomiques repérables (cf. paragraphe suivant), nous permet de parler d'évolution des connaissances pendant la séance.[9]

Il nous reste à définir les savoirs atomiques repérables à partir des informations à notre disposition sur le travail pendant la séance et à donner des exemples d'identification des niveaux de connaissances sur un exercice.

c) savoirs atomiques repérables : Nous avons déjà vu que, dans les questionnaires, les savoirs associés aux questions portaient, sauf pour B sur trois caractéristiques du coefficient : le signe, la taille et l'ordre. Dans le cas de la séance, les informations recueillies sur les coefficients ne sont pas toujours suffisamment renseignantes sur ces caractéristiques. Ainsi pour les coefficients C, P, Q, R et S, qui représentent des coordonnées de points dont les valeurs peuvent être lues sur l'écran d'autant plus qu'ils sont nécessairement des entiers, l'ordre ne constitue pas un élément du savoir aussi pertinent que le signe et la taille qui suffisent pour exprimer l'interprétation graphique de chacun de ces coefficients. Pour A, puisque la valeur n'est pas directement lisible, la taille n'est pas exactement et facilement connue. Il nous semble qu'il ne serait pas pertinent de chercher à trouver des connaissances sur la valeur exacte de la taille. Par contre, il est raisonnable de remplacer cette idée par celle de repérer des connaissances "au sens large" sur la taille, couplées avec des connaissances sur l'ordre. Nous chercherons donc à savoir si les propositions successives de l'élève traduisent une connaissance de la taille (à une unité près) et des propriétés de l'ordre sur A.

---

[8] manifestées ne veut pas dire réellement mises en jeu.

[9] C'est dans les cohérences, à ces deux derniers niveaux, qu'il faut chercher des significations et pas exercice par exercice.

A propos du coefficient B, les savoirs atomiques répertoriés (cf. analyse a priori) Bnul, Beg et Bop sont des savoirs sur des valeurs particulières de B et par suite ne sont pas, sauf cas particuliers, identifiables en séance.

Les savoirs repérables en séance que nous retenons dans cette analyse sont ainsi : le signe, la taille approchée et l'ordre pour le coefficient A, le signe et la taille exacte pour chacun des coefficients C, P, Q, R et S.

Exemple 1 :

Tracé :

	A	P	Q	
P2 :	-2	3	-1	Parabole $-2(x-3)^2 - 1$

Procédure :

C : (3; -1) ; (2 ; -3)

T :	1	4	-2
T :	3	2	0
T :	2	1	-2
R :	- 2	1	-1

Niveaux de connaissances :

A	Signe : 2	Taille : 1	Ordre : 2
P	Signe : 1	Taille : 4	
Q	Signe : 2	Taille : 2	

Il s'agit de la parabole $-2(x-3)^2-1$, et l'élève commence par l'affichage des coordonnées de 2 points puis effectue 3 tracés et fournit enfin sa réponse. Selon notre méthode d'analyse et, en ce qui concerne A, nous regardons l'évolution dans les tracés et la réponse. Le signe proposé se corrige à la fin. La qualité des connaissances sur le signe est donc de niveau 2. La taille, quant à elle, à une unité près, est correcte sur toutes les propositions. Il s'agit donc du niveau 1. A propos du sens de l'ordre, l'écart entre la valeur proposée et la valeur exacte prend successivement les valeurs : 3, 5, 4 et 0. Après avoir augmenté, cet écart diminue lors des deux dernières propositions. La qualité des connaissances est donc de niveau 2. Les niveaux associés à P et Q ne nécessitent pas d'explications.

Exemple 2 :

Tracé :

	A	R	S	
P3 :	-2	8	1	Parabole -2 (x - 8) (x -1)

Procédure :

C : (0 ; -12)

T :	-2	-4	240
T :	-2	8	-8
R :	-2	2	2
R :	-3	2	2

Niveaux de connaissances :

A	Signe : 1	Taille : 1	Ordre : 3
R	Signe : 2	Taille : 3	
S	Signe : 2	Taille : 3	

Notons que R et S correspondent aux points de la parabole sur x'x, et que l'analyse prend en compte les différentes associations possibles. L'analyse prend ainsi en compte le fait que la matrice (R,S) de la procédure est l'une des 4 possibles que l'on peut inférer du protocole. Pour une de ces matrices, au signe de l'un des coefficients (R) correspond le niveau 1 et à l'autre (S) le niveau 2, pour les 3 autres, les niveaux associés au signe sont tous les deux égaux à 2. Nous adoptons l'analyse, statistiquement la plus probable, qui associe aux deux coefficients le même niveau de signe 2. Il en est de même pour la taille.

En ce qui concerne les stratégies suivies par les élèves dans la séance, nous nous intéressons dans la grille, dans un premier temps, à la suite des options codées C, T et R utilisées par l'élève tout au long de la séance. Les régularités seront ensuite identifiées, lorsque possible, en termes de stratégie.

Ajoutons à ceci que, dans le but d'avoir une meilleure présentation, compacte, rapidement et facilement lisible, des informations pertinentes sur la séance et des résultats de l'analyse, la grille doit fournir des graphiques décrivant surtout la conduite du travail de l'élève et l'évolution de ses connaissances.

d) Structure de la grille : La grille aura la structure suivante :

1) Une présentation globale de surface sous forme de statistiques sur la séance montrant en particulier le nombre d'exercices traités, leurs types, les réussites par type et les globalisations.

2) Une présentation interne montrant, pour chaque exercice, les coefficients, les actions effectuées, la réussite ou l'échec, le type ainsi que les niveaux des connaissances manifestées sur les savoirs atomiques identifiés.

3) Des représentations graphiques illustrant le déroulement de la séance et l'évolution des connaissances :

- Un Historique de la séance permettant de visualiser :

  les choix de forme de parabole et leur alternance,

  les actions et leur évolution,

  les réussites et leur position.

- Un graphique de l'évolution des connaissances regroupant pour chacun des coefficients, dans les types rencontrés dans la séance, les représentations graphiques des connaissances sur les savoirs atomiques repérables retenus par notre analyse. Il s'agit de représentations cartésiennes où les exercices sont portés en abscisses et les niveaux de connaissances en ordonnées.

IV-4) L'OUTIL ANALYSES STATISTIQUES GLOBALES

Il s'agit d'analyses à partir de trois méthodes différentes : L'analyse factorielle des correspondances entre variables, l'analyse hiérarchique des similarités, l'analyse implicative.
L'analyse factorielle de correspondances, permet d'identifier les facteurs principaux de discrimination des variables et de les ordonner selon leur importance décroissante.
La classification hiérarchique des similarités selon "l'algorithme de la vraisemblance du lien" (A.V.L.) qui est due à I. C. Lermann [Lermann, 1981] est une méthode d'analyse qui permet d'effectuer sur l'ensemble des variables des partitions en classes de plus en plus vastes. L'analyse implicative, initiée par R. Gras [Gras, 1979], nous permet de dégager des structures implicatives sur l'ensemble des variables permettant de mieux comprendre "la dynamique" de cet ensemble.

Ces méthodes, nous les utiliserons comme entrée dans l'étude des facteurs susceptibles de jouer un rôle dans l'apprentissage et les relations qui les lient, domaine où nous manquons d'hypothèses plausibles. Nous essayerons par ces méthodes de mettre en évidence les principaux facteurs et les principales implications. Nous espérons aussi que les résultats de ces analyses pourront nous aider à préciser le cadre de l'analyse fine des travaux d'élèves qui sera menée ensuite.

IV-5) L'OUTIL ANALYSE FINE DES PROTOCOLES D'ELEVES

Cette analyse sera guidée par les résultats des analyses statistiques globales. Nous analyserons les comportements des élèves et l'évolution de leur travail à partir des faits recueillis et des hypothèses plausibles qu'on peut en inférer. Ces hypothèses conduiront à des faits attendus qui seront confrontés aux faits observés. L'adoption d'une hypothèse sera justifiée par des faits qui la confirment et par la cohérence de l'interprétation globale du travail et des résultats en séance et aux tests. Cette analyse minutieuse sera conduite avec des travaux jugés typiques selon les résultats des traitements globaux.

Dans les deux chapitres suivants nous allons exposer les différentes étapes de l'expérimentation dans chacun des deux cycles selon la structure suivante :

I) CONDITIONS ET DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION

II) TESTS
- II-I) PASSATION DES TESTS
- II-II) RESULTATS
  - II-II-1) METHODE UTILISEE
  - II-II-2) RESULTATS AU PRE-TEST
  - II-II-3) RESULTATS AU POST-TEST

III) SESSION INFORMATIQUE

IV) ANALYSE DES PROTOCOLES

V) ANALYSE DES RESULTATS

VI) SCHEMAS ET CONDITIONS DE PROGRESSION.

CHAPITRE V

EXPERIMENTATION AU SECOND CYCLE

CONDITIONS ET DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION

Trente trois élèves des classes de première S et terminale D d'un lycée privé de la banlieue parisienne ont participé à l'expérimentation. Les élèves de ce lycée sont jugés, d'une façon générale, par leurs professeurs - qui enseignent aussi ailleurs - de niveau plutôt faible.

Pour avoir une idée générale de leur niveau en mathématiques, nous avons eu recours à leurs notes sur le trimestre écoulé de l'année où s'est déroulée l'expérimentation et à leurs livrets scolaires de l'année précédente et nous avons calculé à partir de ces notes des moyennes. La répartition des moyennes est la suivante :

Moyennes	[5 ; 6 [	[6 ; 7 [	[7 ; 8 [	[8 ; 9 [	[9 ; 10[	[10;11[	[11;12]
Effectifs	6	6	4	3	6	5	3

Tableau 5-1-1 : moyennes des élèves

Nous avons considéré de niveau faible tout élève qui a eu une moyenne inférieure ou égale à 8,5. Les autres sont considérés de niveau moyen.

L'expérimentation a commencé début Novembre 1989 par la passation du pré-test. Il a été indiqué aux élèves que l'expérience à laquelle ils participaient entrait dans le cadre d'une recherche didactique sur l'apport de l'outil informatique à l'enseignement, recherche dont les résultats pourraient, on l'espérait, contribuer à l'élaboration de méthodes mieux adaptées à l'enseignement des mathématiques. Il leur a été mentionné qu'une condition nécessaire pour que cette recherche aboutisse à ces objectifs était qu'elle se déroule dans les meilleures conditions et qu'une de ces conditions est leur bonne participation. Il leur a été également précisé que les deux tests prévus ainsi que la séance informatique, bien que très importants dans notre travail de recherche, n'entraient pas dans l'évaluation de leur travail scolaire et que le but des tests était d'obtenir des éléments pour l'évaluation de cette expérience. Il leur a été mentionné enfin qu'il pourrait arriver qu'ils rencontrent certaines des questions pour la première fois, l'enseignement traditionnel, en général, ne mettant pas l'accent dessus. Ce fait ne devait pas constituer a priori un blocage. L'essentiel pour nous était de comparer l'état, avant et après le travail avec ordinateur, de leurs connaissances sur certains points qui nous intéressaient au sujet des fonctions du second degré.

CHAPITRE V - PARTIE I

TESTS : PASSATION ET RESULTATS

TESTS

I) PASSATION DES TESTS

Avant la distribution des questionnaires, nous avons introduit les 3 types d'équations P1, P2 et P3 ainsi que les notations utilisées dans les tests de la manière suivante :

1) Si dans un plan muni d'un repère orthonormé, la parabole (P) est la représentation graphique de la fonction f : x------> $2x^2$-8 alors :

- l'expression $y=2x^2-8$ est dite équation de (P) de la forme (P1) : $y=Ax^2+Bx+C$ avec A=2, B=0 et C=-8,
- l'expression $y=2(x-0)^2-8$ est dite équation de (P) de la forme (P2): $y=A(x-P)^2+Q$ avec A=2, P=0 et Q=-8,
- l'expression $y=2(x-2)(x+2)$ est dite équation de (P) de la forme (P3) : $y=A(x-R)(x-S)$ avec A=2, R=2 et S= -2.

2) L'expression "Pour i= 1, 2, 3, C_i est la courbe d'équation $y=A_i(x-P_i)^2+Q_i$" signifie que C_1, C_2 et C_3 sont les courbes dont des équations sont respectivement : $y=A_1(x-P_1)^2+Q_1$, $y=A_2(x-P_2)^2+Q_2$ et $y = A_3(x-P_3)^2 + Q_3$.

Nous avons également attiré leur attention sur le fait qu'il n'était pas nécessaire de calculer explicitement les coefficients pour pouvoir répondre aux questions.

La durée effective de passation du test a été d'une heure. Les classes de première et de terminale l'ont passé séparément et à des dates différentes.

Au début les élèves ont été désemparés. Ceci s'est manifesté notamment de la façon suivante : un tiers des élèves (10) ne savaient pas comment s'y prendre pour répondre aux questions, un peu moins de la moitié (15) essayaient d'exploiter les coordonnées de points des paraboles données, lues sur les graphiques, dans des calculs. Certains nous ont fait savoir qu'il leur semblait inconcevable de pouvoir répondre de cette façon en une heure, à toutes les questions. Nous leur avons alors rappelé la remarque ci-dessus et ils ont laissé tomber cette stratégie.
Si on interprète par la nouveauté des questions proposées le désarroi des dix élèves, il nous semble que l'on retrouve dans le comportement des quinze autres cités une tendance générale chez les élèves : devant une situation équation-courbe (équation-droite), la première réaction, indépendamment du contexte, est de "remplacer" x et y dans l'équation par des coordonnées de points de la courbe (droite). Cette tendance est, à notre avis, une des conséquences du fort usage dans l'enseignement du cadre algébrique dans le traitement des fonctions (cf. les recherches de Guzman-Retamal, Nadot, ... cités dans le chapitre II).

Quelques élèves (3) ont, eux, utilisé leurs calculatrices en mode graphique en traçant des courbes du même type que celui des paraboles de l'exercice à traiter, dans le but de trouver les coefficients pour lesquels la courbe tracée vérifiait la (les) propriété(s) des paraboles en question. Cette démarche peut sembler exagérément coûteuse mais elle est le fait d'élèves qui ont une attitude très positive par rapport à l'informatique. Ils possèdent souvent un P.C. et essayent en diverses circonstances de tirer profit de leur calculatrice (mode graphique dans l'étude d'une fonction, mode programmation pour le calcul des

valeurs d'une fonction, mode fichier pour un récapitulatif de formules). Leurs pré-tests ont été parmi les meilleurs.
Certains autres (4) ont utilisé leurs règles pour tracer sur les graphiques des droites leur permettant de trouver les coordonnées de certains points.
Pour les formes P2 et P3, la plus grande partie des élèves est repassée par la forme P1 en essayant de l'utiliser comme forme intermédiaire. Ils se sont aperçus par la suite que cette approche était fastidieuse et sans efficacité par rapport aux questions posées.
Là aussi on retrouve une tendance assez générale chez les élèves qui consiste à considérer la forme (P1) comme forme canonique de l'équation d'une parabole. Cette attitude est renforcée par l'enseignement sur les fonctions qui considère cette forme comme forme de base dans l'étude des fonctions du second degré et la privilégie très fortement.

Personne n'a rendu sa copie moins de vingt minutes après le début du test mais huit élèves ont rendu les questionnaires sans y inscrire de réponses. Ceci est, à notre avis, un signe de l'aspect inhabituel des tâches qui leur étaient proposées.

Le pré-test n'a pas été corrigé et dans les jours qui l'ont suivi les élèves n'ont pas eu de cours, ni sur les fonctions du second degré, ni sur les équations du second degré.

Deux semaines après le pré-test, les élèves ont passé le post-test, pendant une heure également. Entre-temps ils ont eu une heure de travail individuel avec le logiciel. Pendant la séance informatique chaque élève a travaillé sur les deux types du groupe expérimental auquel il appartenait : P1 et P3 pour un groupe, P2 et P3 pour l'autre. L'élève disposait d'un brouillon et pouvait donc effectuer des calculs ou organiser et contrôler son travail sur papier. Il travaillait librement et le professeur n'intervenait que pour expliquer, à sa demande, le fonctionnement du logiciel. La tâche proposée dans le logiciel, rappelons-le, consiste à trouver une équation pour une parabole tracée. Les élèves ont eu au post-test des comportements et des méthodes de travail différentes de celles du pre-test. Contrairement à ce qui était passé au pré-test, la grande majorité des élèves (26) n'a pas eu recours aux calculatrices. Deux seulement des quatre élèves qui utilisaient des règles dans le pré-test ont continué à le faire au post-test. Nous n'avons pas non plus remarqué d'élèves utilisant la forme P1 comme passage obligé pour des questions sur P2 ou P3. Très peu d'élèves ont fait des calculs sur papier. Un changement de rapport à la tâche a été également remarqué : la plupart des élèves sont restés jusqu'à la fin du temps imparti. Tous ont produit des réponses.

II) RESULTATS

II-1) METHODE D'ANALYSE

Les questions ayant été construites à partir des savoirs atomiques identifiés et cités plus haut, nous allons interpréter les résultats en référence à ces savoirs qui sont, rappelons-le :

(Apos), (Aneg), (Aordpos), (Aordneg), (Aord), (Aeg) et (Aop) pour le coefficient A dans les 3 types équation, (Cpos), (Cneg), (Cnul), (Cord), (Ceg), (Cop) pour C, (Bnul), (Beg), (Bop) pour B, (Ppos), (Pneg), (Pnul), (Pord), (Peg), (Pop), (Qpos), (Qneg), (Qnul), (Qord), (Qeg), (Qop) pour P et Q, (RSpos), (RSneg), (RSposneg), (RSeg), et IdFac, pour R et S.

A un premier niveau d'analyse, pour chaque test à chaque savoir atomique nous associons un indice obtenu en calculant le pourcentage de réponses correctes à la question unique correspondant à ce savoir dans le test concerné. Dans le cas où la bonne réponse est multiple, elle n'est considérée comme correcte que si elle est complètement correcte.
Exemple : l'indice de connaissance relatif à (Apos) au pré-test et à la forme (P1) est le pourcentage de bonnes réponses à la question I-1). Une réponse correcte à cette question étant une réponse qui contient les 3 et seulement les 3 coefficients A2, A3 et A5.

Ces indices nous permettent de disposer d'un moyen d'analyse des résultats par rapport aux savoirs atomiques. Pour avoir la possibilité d'étudier les résultats et de les interpréter en termes d'autres savoirs "atomiques" simples comme par exemple le savoir sur le signe de A ou en termes de savoirs plus complexes et non atomiques comme le savoir sur la taille de A, nous avons eu recours à d'autres indicateurs que nous avons appelés "indices globaux de connaissance".
Ainsi à un deuxième niveau d'analyse, nous avons regroupé certains savoirs atomiques concernant un même coefficient dans une forme d'équation pour définir des indices globaux d'ordre 1 comme par exemple :

1) L'indice signe de A pour la forme P1 qui est la moyenne des indices de connaissance sur Apos et Aneg dans la forme P1.

2) L'indice valeurs et relations particulières de C est la moyenne des indices sur Cnul, Ceg et Cop.

A un troisième niveau nous avons défini des indices globaux d'ordre 2 relatifs à chacun des coefficients et à des groupes de coefficients pour une forme et une phase (pré-test ou post-test). Un tel indice est pour un coefficient la moyenne de tous les indices atomiques pris en compte pour ce coefficient. Ainsi l'indice de R et S dans la forme P3 est la moyenne des indices RSpos, RSneg, RSposNeg, et RSeg.
Puis nous avons défini un indice global d'ordre 3 relatif à une forme pour une phase. Un tel indice est la moyenne des indices de coefficients de la même phase impliqués par cette forme. Ainsi l'indice de P3 au pré-test est la moyenne des indices d'ordre 2 pour P3 au pré-test.
Enfin nous avons défini un indice global d'ordre 4 relatif à A dans un test qui est la moyenne des indices du coefficient A dans les trois formes du test concerné et un indice (d'ordre 5) de test qui est la moyenne des indices de forme au test concerné.

Ces indices nous permettent de comparer les performances globales de la population au niveau coefficient, au niveau groupe de coefficients, au niveau forme d'équation ainsi qu'au niveau du test globalement.
Dans la suite, dans le but d'éviter des répétitions et pour la simplicité de l'expression, nous utiliserons des codes uniquement pour identifier les indices globaux de différents ordres qui nous semblent les plus pertinents au vu des résultats obtenus :
Pour un coefficient X, le code OX est pour "l'ordre sur X", SX est pour " le signe de X", TX est pour "la taille de X", VX est pour "les valeurs et relations particulières sur X " et X désigne l'indice global sur le coefficient X.

Les tableaux suivants résument les savoirs mis en jeu dans les analyses ainsi que leurs caractéristiques selon les points de vue : atomique/non atomique, simple/complexe et ponctuel/global.

Savoir	Apos	Aneg	Aeg	Aop	SA	OA	TA	A
Atomique	X	X	X	X	X	X		
Non atomique							X	X
Simple	X	X	X	X	X			
Complexe						X	X	X
Ponctuel								
Global	X	X	X	X	X	X	X	X

Tableau 5-1-2 : les savoirs sur A dans P1, P2 et P3

Savoir	Cpos	Cneg	Ceg	Cop	Cnul	SC	OC	TC	C
Atomique	X	X	X	X	X	X	X		
Non atomique								X	X
Simple	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Complexe									
Ponctuel	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Global									

Tableau 5-1-3 : les savoirs sur C dans P1

Notons que les savoirs sur B dans P1 (Beg, Bnul et Bop) sont tous atomiques, complexes (excepté Bnul) et ponctuels tandis que les savoirs sur P, Q (dans P2), R et S (dans P3) sont similaires à ceux de C.

II-2) RESULTATS DU PRE-TEST

a) FORME (P1)

Les valeurs des indices (données en pourcentage de réussite même si les effectifs sont faibles, pour faciliter la lecture) sont consignées dans les tableaux suivants :

- Indices atomiques :

SA	Aeg	Aop	Aord
56	11	11	6

Bnul	Beg	Bop
17	0	0

SC	Cnul	Ceg	Cop	Cord
6	6	6	0	0

- Indices globaux :

A	VA	TA
20	11	9

B	VB
6	0

C	VC	TC
4	4	3

Tableaux 5-1-4 : les valeurs des indices de P1 au pré-test

1) Si aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 20%, la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 56% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 6%. Ceci met en évidence le fait que les connaissances manifestées sur A ne sont pas maîtrisées de la même façon. L'idée de connaissance intermédiaire derrière la notion de connaissance atomique, à la base de notre analyse, apparaît donc comme outil bien adapté à cette analyse.
Cette différence entre les pourcentages peut-être, au moins partiellement, interprétée par le fait que l'identification du signe de A est liée à une seule parabole et ne demande aucune "appréciation" de l'ouverture tandis que les autres connaissances correspondant à l'ordre sur A et aux relations particulières mettent nécessairement en jeu simultanément plusieurs paraboles.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur B est de 6%, et celle qui correspond à (Bnul) est de 17 %.
Le fait qu'il y ait deux niveaux de réussite pour les connaissances atomiques sur B peut-être, là encore, lié au fait que Bnul est associé à une valeur particulière du seul coefficient B tandis que Beg et Bop, qui sont associés à des valeurs égales de A, mettent en jeu plusieurs paraboles - même si c'est implicitement - et de plus concernent les deux coefficients A et B.

3) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur C est de 4%.
Ce résultat nous a un peu étonné. Nous nous attendions à une réussite plus élevée : a priori nous estimions que les connaissances sur C étaient les plus faciles de la forme P1 parce qu'elles ne nécessitent que du repérage de coordonnées et de la lecture ponctuelle (sur l'axe des ordonnées). Ces tâches sont les plus proches de l'enseignement et généralement sont maîtrisées par les élèves de ce niveau.

4) La réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P1) est de 10 %.

En résumé selon la réussite, les connaissances atomiques se rassemblent en quatre classes :

Réussite en %	~ 50	10-20	~ 5	0
Connaissances	SA	Bnul Aeg Aop	SC Aord Cnul Ceg	Beg Bop Cord Cop

Tableau 5-1-5 : les classes
des connaissances atomiques sur P1, selon la réussite, au pré-test

b) FORME (P2)

Les tableaux suivants montrent les valeurs des indices relatifs à la forme P2 :

- indices atomiques :

SA	Aeg	Aop	Aord
53	27	13	7

Pnul	SP	Peg	Pop	Pord
27	13	7	7	7

SQ	Qnul	Qeg	Qop	Qord
27	20	20	13	13

- Indices globaux :

A	VA	TA
25	20	16

VP	TP	P
13	12	12

Q	VQ	TQ
19	18	17

Tableaux 5-1-6 : les valeurs des indices sur P2 relatifs au pré-test.

1) Si aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 25%, la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 53% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 7%.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur P est de 12%, celle qui correspond à (POrd) est de 7 % et la connaissance atomique sur P la mieux réussie est (Pnul).

3) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur Q est de 19% et la plus grande réussite est associée à la connaissance élémentaire signe de Q.

La légère différence entre réussite sur P et réussite sur Q bien qu'elle ne soit pas assez significative peut être due, nous semble-t-il, à la mise en relief dans l'enseignement du rôle de Q dans la forme canonique lors de l'illustration graphique de l'extremum d'une fonction du second degré.

4) La réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P2) est de 19 %.

En résumé selon la réussite, les connaissances atomiques se rassemblent en quatre classes :

Réussite en %	~ 50	20-30	~ 15	~ 5
Connaissances	SA	Pnul Aeg Qeg SQ Qnul	SP Aop Qord Qop	Aord Pord Peg Pop

Tableau 5-1-7 : les classes
des connaissances atomiques sur P2, selon la réussite, au pré-test

c) FORME (P3)

Les valeurs des indices sur la forme P3 figurent dans le tableaux suivants :

- Indices atomiques :[1]

SA	Aeg	Aop	Aord
50	18	9	6

[1] RS++, RS--, RS+- désignent respectivement RSpos, RSneg et RSposNeg.

RS++	RS+-	RS--	RSeg	IdFac
9	9	3	3	3

- <u>Indices globaux</u> :

A	VA	TA
21	14	11

SRS	RS	TRS
7	5	3

Tableaux 5-1-8 : les valeurs des indices sur la forme P3 au pré-test.

1) Aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 21% et la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 50% tandis que la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 6%.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur R et S est de 5%.

3) la réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P3) est de 11 %.

En résumé, selon la réussite, les connaissances atomiques se rassemblent en quatre classes :

Réussite en %	~ 50	~ 20	~ 10	~ 5
Connaissances	SA	Aeg	RS++ RS+- Aop	OrdA RS-- RSeg IdFac

Tableau 5-1-9 : les classes
des connaissances atomiques sur P3, selon la réussite, au pré-test

d) SUR LE PRE-TEST GLOBALEMENT

Les indices globaux sur le pré-test ont les valeurs données par le tableau suivant :

SA	A	VA	I^2	TA	OA
53	22	15	13	12	6

Tableau 5-1-10 : les valeurs des indices globaux au pré-test.

1) Si, dans les trois formes d'équations, aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 22%, la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 53% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 6%.

2) La réussite globale correspondant à toutes les connaissances impliquées dans les trois formes équations est de 13%.

e) COMMENTAIRES :

La faiblesse des résultats montre clairement que l'articulation n'est pas construite même pour les connaissances généralement supposées élémentaires comme celles sur C.

La stabilité des résultats sur A, d'une forme à l'autre - cette stabilité signifiant "même performance moyenne", selon la forme, des connaissances des élèves sur A - peut être interprétée par le fait que les élèves perçoivent bien le même "statut" de A dans les 3 formes.
La hiérarchie des connaissances sur A pour les 3 formes est la suivante :

AOrd	<	Aop	<	Aeg	<	SA

ce qui signifie :

signe	>	valeurs particulières et relations (Taille)	>	ordre

Les interprétations ponctuelles sont elles aussi hiérarchisées : les coefficients C, B, R et S sont les plus mal connus des élèves puis viennent dans l'ordre les coefficients Q, P et A.

[2] I est l'indice de connaissances global au pré-test.

Ceci est illustré par le tableau suivant :

C	RS	B	P	Q	A
3	5	6	12	19	22

Tableau 5-1-11 : les valeurs des indices de connaissance des coefficients au pré-test.

Ceci permet de hiérarchiser les connaissances associées aux coefficients selon leur lien au graphique :

points sur les axes	<	Sommet	<	ouverture et orientation

Ceci tendrait à prouver que les connaissances ponctuelles sont moins bien maîtrisées que certaines connaissances globales. C'est un résultat inattendu qui semble contredire les résultats d'autres recherches prouvant au contraire que les performances des élèves sur des savoirs globaux sont nettement moins bonnes que leurs performances sur les savoirs ponctuels. Comment expliquer ce résultat ?

Notons tout d'abord que les résultats mettant en évidence des décalages ponctuel/global concernent souvent des graphes affines ou affines par morceaux. C'est le cas par exemple pour les travaux de Duval déjà cités. Ici nous avons affaire à des fonctions du second degré et les connaissances globales les mieux maîtrisées concernent le coefficient A. Ce résultat peut trouver sa source, au moins partiellement, dans le rôle joué au début de l'enseignement par les fonctions de la forme x -----> A x^2 pour lesquelles le seul paramètre en jeu est A, son effet étant systématiquement étudié. Mais il est intéressant que les connaissances acquises se transfèrent aux autres formes.

Il nous semble aussi que le fait que le pourcentage de bonnes réponses sur Bnul (17%) soit légèrement supérieur à ceux relatifs à B (6 %) peut être interprété par le fait que les paraboles de la forme $y=Ax^2+C$ pour lesquelles B=0 sont elles aussi privilégiées par l'enseignement. Notre exemple introductif aux questionnaires : $y = 2x^2 - 8$, était d'ailleurs de ce type.

Les 3 formes P1, P2 et P3 ne sont pas équivalentes du point de vue de la réussite mais se hiérarchisent de la façon suivante :

P3	≅	P1	<	P2

Les résultats sur le pré-test peuvent nous permettre de conclure que les performances des élèves sur le type (P2) sont légèrement meilleures. C'est pourtant la forme (P1) qui est presque la seule rencontrée par les élèves dans les classes. Il nous semble important de faire à ce sujet les remarques suivantes :

i) dans l'équation P1 les questions sur B, qui sont plus difficiles que les autres, ont influencé les résultats globaux sur P1,

ii) Les performances relativement meilleures des élèves sur P2 peuvent être dues au passage à la forme canonique dans l'enseignement tandis que P3 devrait sa basse position au fait qu'elle est rarement rencontrée par les élèves.

II-3) RESULTATS DU POST-TEST

a) FORME (P1)

Les valeurs des indices de la forme P1 sont données par les tableaux suivants :

- Indices atomiques :

SA	Aeg	Aop	Aord
89	78	78	22

Bnul	Beg	Bop
50	17	17

SC	Cop	Ceg	Cnul	Cord
67	60	56	50	33

- Indices globaux :

VA	A	TA
78	67	59

B	VB
28	17

VC	TC	C
56	54	53

Tableaux 5-1-12 : les indices sur P1 relatifs au post-test.

1) Aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 67%. La réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 89% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 22%.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur B n'est que de 28%, et celle qui correspond à (Bnul) est de 50 %.

3) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur C est de 53%.

4) la réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P1) est de 49 %.

Ce qui est remarquable dans ces résultats, ce sont les niveaux de réussite assez bon et moyen pour les connaissances sur A et C d'un côté, et le niveau faible pour les connaissances sur B de l'autre, excepté pour (Bnul).

En résumé, selon la réussite, les connaissances atomiques se rassemblent en quatre classes :

Réussite en %	> 65	50-60	20-40	~15
Connaissances	SA Aeg Aop SC	Bnul Cnul Ceg Cop	Cord Aord	Beg Bop

Tableau 5-1-13 : les classes
des connaissances atomiques sur P1, selon la réussite, au post-test

b) FORME (P2)

Tableaux des valeurs des indices :

- <u>indices atomiques</u> :

SA	Aeg	Aop	Aord
87	73	67	33

Pnul	SP	Peg	Pop	Pord
87	83	80	73	60

SQ	Qnul	Qord	Qeg	Qop
80	73	67	60	53

- Indices globaux :

VA	A	TA
70	65	58

VP	P	TP
80	77	75

Q	TQ	VQ
67	63	62

Tableaux 5-1-14 : les indices sur P2 relatifs au post-test.

1) Si aux connaissances sur A correspond une bonne réussite globale (65%), la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 87% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 33%.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur P est très bonne (77%), et il n'y a pas de différences significatives entre les réussites aux connaissances concernant P, mis à part le sens de l'ordre sur P.

3) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur Q est bonne (67%) et la plus grande réussite est associée à la connaissance élémentaire SQ (80%).
La légère différence entre réussite sur P et réussite sur Q n'est pas significative.

4) La réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P2) est bonne (69%).

En résumé selon la réussite, les connaissances atomiques se rassemblent en trois classes :

Réussite en %	> 65	50-60	< 40
Connaissances	SA Pnul Aeg Qnul Aop Pop SP SQ Qord	Pord Qeg Qop	Aord

Tableau 5-1-15 : les classes
des connaissances atomiques sur P2, selon la réussite, au post-test

c) FORME (P3)

Les tableaux suivants contiennent les valeurs des indices de la forme P3 :

- Indices atomiques :

SA	Aeg	Aop	Aord
85	79	70	24

RS+-	RS++	RS--	RSeg	IdFac
73	67	61	52	30

- Indices globaux :

VA	A	TA
74	64	58

SRS	RS	TRS
67	57	41

Tableaux 5-1-16 : les valeurs des indices de la forme P3 au post-test.

1) Aux connaissances sur A correspond une réussite globale de 64%, la réussite qui correspond aux connaissances sur le signe de A s'élève à 85% et la réussite correspondant aux connaissances sur l'ordre sur A n'est que de 24%.

2) La réussite globale qui correspond aux connaissances sur R et S est moyenne (56%).

3) La réussite globale correspondant à l'ensemble des connaissances sur les relations entre coefficients et parabole de type (P3) est plutôt bonne 59 %.

En résumé selon la réussite, les connaissances atomiques se ressemblent en trois classes :

Réussite en %	> 60	˜ 50	≤ 30
Connaissances	SA RS++ Aeg Aop RS-- RS+-	RSeg	Aord IdFac

Tableau 5-1-17 : les classes
des connaissances atomiques sur P3, selon la réussite, au post-test

d) SUR LE POST-TEST GLOBALEMENT

Voici le tableau de valeurs des indices :

SA	VA	A	I	TA	OA
87	74	65	59	58	27

Tableau 5-1-18 : les valeurs des indices globaux au post-test.

1) 65 % est la réussite globale associée aux connaissances sur A dans les 3 types d'équation.

2) 59 % est la réussite globale associée aux connaissances au post-test.

e) COMMENTAIRES :

Sur les résultats du post-test nous faisons les remarques suivantes :

1) La hiérarchie des connaissances sur A est la même pour les trois formes :

OA	<<	TA	<	SA

et c'est la même que la hiérarchie rencontrée au pré-test.

2) Le coefficient B reste le plus mal connu des coefficients. Ceci est illustré par le tableau suivant :

P	Q	A	RS	C	B
77	67	59	56	53	28

Tableau 5-1-19 : les valeurs des indices relatifs aux coefficients au post-test.

Ceci permet de hiérarchiser les connaissances mises en jeu selon leur lien au graphique de la façon :

point sur y'y	~	point sur x'x	~	ouverture et orientation	<	sommet

La comparaison de cette hiérarchie avec celle rencontrée au pré-test montre surtout un changement dans les positions mutuelles de "ouverture et orientation" et "sommet". L'amélioration a donc affecté davantage les connaissances liées au sommet.

3) Les 3 formes P1, P2 et P3 sont classées, par rapport à la réussite globale, cette fois selon la hiérarchie suivante :

P1	<	P3	<	P2

II-4) HIERARCHIE DES SAVOIRS

On observe entre pré-test et post-test un changement significatif dans les pourcentages de réussite. Il y a eu donc évolution des connaissances des élèves sur les savoirs mis en jeu par les tests. Dans ce qui suit, nous allons essayer d'analyser plus finement que nous ne l'avons fait jusqu'à présent les savoirs atomiques et leurs hiérarchies. Nous essayerons tout d'abord de préciser le sens que nous adoptons pour "unités perceptives", "unités symboliques", associées à un savoir atomique et pour "adéquation", "non adéquation" entre unités perceptives et unités symboliques associées à un savoir atomique. Nous analyserons ensuite la difficulté relative des savoirs atomiques suivant plusieurs critères dont l'un est celui d'adéquation/non adéquation entre unités perceptives et unités symboliques. Enfin nous essayerons d'expliquer la hiérarchie de ces savoirs selon la réussite au post-test, relativement à ces différents critères.

Un savoir atomique exprime une relation entre des caractéristiques graphiques associées à des unités perceptives et des caractéristiques algébriques associées à des unités symboliques. Considérons par exemple la forme d'expression P1: $Ax^2 + Bx + C$. Par analogie avec le travail déjà cité de R. Duval pour les fonctions affines, nous identifions pour cette forme huit variables symboliques dont la signification et les valeurs possibles sont précisées à partir d'un exemple dans le tableau suivant :

Cas de P1 :

Exemple		2	x^2	-	5	x	+	3
Variables	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	V18
Valeurs	rien, -	réel >0 rien	x^2	-, +, rien	rien, réel >0	rien, x	+, -, rien	réel >0, rien

Tableau 5-1-20 : Les variables symboliques associées à P1.

De la même façon, nous associons à une expression algébrique de la forme P2: $A(x-P)^2+Q$ et à une expression de la forme A(x-R)(x-S), respectivement 10 et 12 variables symboliques dont la signification et les valeurs sont données par les tableaux suivants :

Cas de P2 :

Exemple	-	2	(	x	-	3	)	2	+	2
Variables	V21	V22	V23	V24	V25	V26	V27	V28	V29	V210
Valeurs	rien, -	réel >0 rien	rien, (	x, x^2	+, -, rien	réel>0, rien	rien,)	2, rien	-, +, rien	réel >0, rien

Tableau 5-1-21 : Les variables symboliques associées à P2.

Cas de P3 :

Exemple	-	2	(	x	-	3	)	(	x	+	2	)
Variables	V31	V32	V33	V34	V35	V36	V37	V38	V39	V310	V311	V312
Valeurs	rien, -	réel >0, rien	rien, (	x, x^2	+, -, rien	réel>0, rien	rien,)	rien, (	x, rien	+, -, rien	réel>0, rien	), rien

Tableau 5-1-22 : Les variables symboliques associées à P3.

La variable V11 est donc la variable symbolique associée à la variable algébrique signe de A. Mais certaines variables symboliques n'ont pas de traduction algébrique pertinente à moins qu'elles ne soient associées à d'autres. Les caractéristiques d'une expression algébrique donnée se traduisent par certaines valeurs d'un sous-ensemble de ces variables symboliques éventuellement réduit à un seul élément.

Ainsi, la propriété algébrique : "le coefficient A est positif" se traduit par : "V11 = rien", la propriété algébrique : "il n'y a pas de terme en x" se traduit par : "(V14, V15, V16) = (rien, rien, rien)", "C est nul" se traduit par : "(V17, V18) = (rien, rien)" et "R = 0" par "(V33, V34, V35, V36, V37) = (rien, x, rien, rien, rien)".
Nous appelons unité symbolique l'ensemble des valeurs des variables symboliques associées à une caractéristique algébrique.

De même, en ce qui concerne les caractéristiques d'une expression algébrique donnée, les variables perceptives répertoriées sont les suivantes :

Code	Variable	Valeurs
G1	orientation de l'ouverture	Haut Bas
G2	position du sommet par rapport à x'x	Au-dessus Au-dessous Sur
G3	position du sommet par rapport à y'y	A gauche A droite Sur
G4	position de l'intersection avec y'y par rapport à x'x	Invisible* Au-dessus Au-dessous A l'origine
G5	position de la parabole par rapport à x'x	Ne coupe pas Touche sans couper Coupe
G6	nombre de points d'intersection visibles avec x'x	0 point 1 point 2 points
G7**	position des points d'intersection visibles avec x'x par rapport à y'y	1 point à gauche* 1 point à droite* 2 points à gauche 2 points à droite 1 point à gauche et un point à droite

Tableau 5-1-23 : Les variables perceptives.

Par analogie avec ce qui précède, nous appelons unité perceptive l'ensemble des valeurs des variables perceptives associées à une caractéristique graphique. Par exemple, la propriété graphique : "le sommet est sur x'x" se traduit par l'unité perceptive : G3 = "Sur" ou l'unité perceptive (G5 = "Touche sans couper", G6 = "1 point").

Un savoir atomique articule des caractéristiques graphiques et algébriques via l'association d'unités perceptives et symboliques. L'acquisition d'un savoir atomique met en jeu :
- le repérage des unités perceptives concernées et des unités symboliques mises en jeu,
- l'établissement de l'articulation entre ces unités.

---

* Cette valeur de la variable n'est pas mise en jeu par nos savoirs atomiques.
** On aurait pu a priori envisager la variable perceptive "position du sommet par rapport aux quatre quadrants". Nous ne le faisons pas ici car les correspondances mises en jeu par les savoirs atomiques ici ne s'y prêtent pas.

Les difficultés interviennent aux deux niveaux et il est raisonnable de faire l'hypothèse que la quantité et la qualité des unités concernées dans chaque registre contribuent à sa plus ou moins grande accessibilité du savoir atomique considéré pour les élèves. Nous faisons l'hypothèse que cette accessibilité dépend :
- du nombre d'objets graphiques (ou algébriques) mis en jeu,
- de la nature des unités perceptives, symboliques et du degré de familiarité de l'élève avec les éléments de ces unités.
Mais les caractéristiques de l'articulation entre les unités symboliques et perceptives sont tout autant à prendre en compte. A ce niveau, nous distinguerons ici a priori deux sources de difficulté :
- la non "adéquation formelle" (NF),
- la non "adéquation sémantique" (NS).

Nous dirons qu'il n'y a pas adéquation formelle, si la correspondance articule des unités perceptives et symboliques dont certains composants dans un registre n'ont pas de correspondant dans l'autre. Ainsi, il y a adéquation formelle pour le savoir RS+- (R et S sont de signes contraires <-----> un point d'intersection est à gauche de y'y et l'autre à droite) mais pas pour le savoir Apos (l'ouverture de la parabole est tournée vers le haut <-----> A est positif), la positivité de A se traduisant par la valeur "rien" de la variable V11. Le savoir RSeg (le sommet est sur x'x <-----> R et S sont égaux) lui aussi ne présente pas d'adéquation formelle, R et S ne s'articulant pas directement sous la forme P3 à des caractéristiques du sommet mais à des caractéristiques des **deux** points d'intersection avec x'x.

Nous dirons qu'il y a non adéquation sémantique si certaines caractéristiques des unités symboliques et perceptives tendent à s'opposer. Ainsi il y a non adéquation sémantique pour le savoir SP (signe de P) ; ce savoir est associé à la variable symbolique V25 dont la valeur "-" par exemple correspond à la valeur "à droite de y'y" de la variable perceptive G3 c'est-à-dire le signe "+" de P.

Pour étudier la hiérarchie des savoirs atomiques, nous les avons donc analysés du point de vue de leur difficulté relative suivant différents critères :
- le nombre d'objets concernés : nombre d'expression algébriques, de paraboles,
- les unités perceptives en jeu et le plus ou moins grande familiarité supposée de l'élève avec le type de leurs éléments graphiques (nouveau, ancien élémentaire, ancien non élémentaire),
- les unités symboliques en jeu[3],
- la qualité de la correspondance entre unités perceptives et unités symboliques.
Nous avons aussi pris en compte :
- la distinction du point de vue ponctuel /global souvent utilisée dans l'analyse des savoirs liés au registre graphique,
- la distinction peu précise que nous avons déjà opérée entre savoirs simples et complexes (cf. page 114).

Illustrons le fonctionnement de cette analyse par deux exemples : le cas du savoir SP (signe de P) et le cas du savoir OA (l'ordre sur A). Le savoir SP est associé à un seul objet graphique (une parabole), à un seul objet algébrique (une expression), à une seule variable perceptive (la position du sommet par rapport à l'axe des ordonnées) à deux valeurs possibles : les deux

[3] Nous n'avons pas fait intervenir ici la plus ou moins grande familiarité des élèves avec les éléments des unités symboliques, ce critère ne différenciant pas ces unités, vu les classes concernées. Il serait sans aucun doute nécessaire de le faire intervenir avec des élèves encore peu familiarisés avec le langage algébrique élémentaire considéré ici.

unités perceptives (le sommet est à droite de l'axe des ordonnées, le sommet est à gauche de l'axe des ordonnées). D'autre part, les éléments graphiques mis en jeu (point et axe) sont des objets graphiques anciens élémentaires. Sur le plan symbolique ce savoir est associé à la variable symbolique V25 (le symbole signe contraire de P) à laquelle correspondent deux unités symbolique : "+" et "-". L'articulation entre unités symboliques et unités perceptives respecte l'adéquation formelle mais non l'adéquation sémantique, comme nous l'avons montré plus haut. L'ensemble de ces caractéristiques situe ce savoir, a priori, plutôt du côté des savoirs atomiques simples. Le savoir OA (l'ordre sur A), quant à lui, est associé à plus de deux objets (plus de 3 paraboles et équations dans les tests) et à deux variables perceptives (l'orientation de l'ouverture de la parabole et son amplitude). Il s'agit d'éléments graphiques nouveaux. Sur le plan symbolique, il est aussi associé à deux variables symboliques : la variable signe et la variable |A|. L'articulation ne respecte pas l'adéquation formelle entre unités perceptives et unités symboliques et il n'y a pas non plus adéquation sémantique (parabole plus ouverte <----> A est plus grand si A est négatif et A est plus petit si A est positif). Ces caractéristiques nous amènent à considérer OA comme un savoir particulièrement complexe.

Les résultats de cette analyse ont été comparés aux résultats de réussite au post-test. Les pourcentages de réussite sont donnés par le tableau suivant :

Savoirs	Pourcentages	Savoirs	Pourcentages
SA, Pnul	87	RS--	61
SP	83	Qeg, Pord, Pop	60
SQ,Peg	80	Ceg, Qop, RSeg	56, 53, 52
Aeg	77	Cnul, Bnul	50
Pop, Aop, Qnul, RS+-	72-73	Cord, Aord	33, 26
SC, Qord, RS++	67	Beg, Bop	17

Tableau 5-1-24 : Les pourcentages de réussite au post-test.

La classification des savoirs selon la réussite suggère les 4 classes désignées (de la gauche à la droite) dans la suite par C1, C2, C3, C4 et qui apparaissent dans le tableau 5-1-25.

Les résultats de l'analyse sont consignés dans les tableaux 5-1-26, 5-1-27 et 5-1-28 où la position d'un savoir est déterminée par la valeur i de la classe Ci à laquelle il appartient, "N" et "AE" dans la cinquième colonne désignent respectivement "nouveau" et "ancien élémentaire". "NF", "NS", et "A" dans la septième colonne désignent respectivement "non adéquation formelle", "non adéquation sémantique" et "adéquation".

Réussite en %	> 73	61-73	50-60	< 35
Savoirs	SA Pnul SP SQ Peg Aeg	Pop Aop Qnul RS+- SC Qord RS++ RS--	Cop Pord Qeg Ceg Qop RSeg Bnul Cnul	Cord Aord Beg Bop

Tableau 5-1-25 : Les classes de savoirs atomiques selon la réussite au post-test.

Savoir	Position	Nombre d'objets	Variables et Unités perceptives	Type d'objets perceptifs	Variables et Unités symboliques	Adéquation/ non adéquation
SA	1	1	variable : orientation de l'ouverture	N	variable : Vi1	N F (absence du symbole si A>0)
SC	2	1	variable : position du point sur y'y par rapport à x'x	AE	variable : V17	A
SP	1	1	variable : position du sommet par rapport à y'y	AE	variable : V25	N S (symbole du signe contraire de celui de P)
SQ	1	1	variable : position du sommet par rapport à x'x	AE	variable : V29	A
Bnul	3	1	unité : le sommet est sur y'y	AE	unité : absence du groupe de symboles $+ B x^2$	N F (absence de symboles)
Pnul	1	1	unité : le sommet est sur y'y	AE	unité : absence du groupe de symboles correspondant aux variables V23, V25, V26 et V27	N F (absence de symboles)
Qnul	2	1	unité : le sommet est sur x'x	AE	unité : absence du groupe de symboles + Q	N F (absence de symboles)
Cnul	3	1	unité : la parabole passe par O	AE	unité : absence du groupe de symboles + C	N F (absence de symboles)

Tableau 5-1-26 : Les savoirs atomiques selon différents critères

Savoir	Position	Nombre d'objets	Variables et Unités perceptives	Type d'objets perceptifs	Variables et Unités symboliques	Adéquation/ non adéquation
RSeg[4]	2	1	unité : le sommet est sur x'x	AE	unité : mêmes valeurs pour V35 et V310 ainsi que pour V36 et V311	N F, N S (absence de symboles graphiques : points distincts sur x'x)
RS++	2	1	unité : les points sur x'x sont à droite de y'y	AE	unité : même valeur - pour V35 et V310	N S (symbole du signe contraire de celui de R et S)
RS+-	2	1	unité : les points sur x'x sont de part et d'autre de y'y	AE	unité : valeurs opposées pour V35 et V310	A
RS--	2	1	unité : les points sur x'x sont à gauche de y'y	AE	unité : même valeur + pour V35 et V310	N S (symbole du signe contraire de celui de R et S)
Ceg	3	2	unité : même point sur y'y	AE	unité : même valeur pour V17 et même valeur pour V18	A
Peg	1	2	sommets sur la même verticale	AE	l'unité symbolique : mêmes valeurs pour V25 et mêmes valeurs pour V26	A
Qeg	1	2	unité : sommets sur la même horizontale	AE	unité : mêmes valeurs pour V29 et mêmes valeurs pour V210	A
Aeg	1	2	unité : ouvertures de même amplitude et de même orientation	N	unité : mêmes valeurs pour Vi1 et mêmes valeurs pour Vi2	A
Aop	2	2	unité : ouvertures de même amplitude et d'orientations opposées	N	unité : valeurs opposées pour Vi1 et mêmes valeurs pour Vi2	A

Tableau 5-1-27 : Les savoirs atomiques selon différents critères.

[4] dans le cas de valeurs non nulles de R et S.

Savoir	Position	Nombre d'objets	Variables et Unités perceptives	Type d'objets perceptifs	Variables et Unités symboliques	Adéquation/ non adéquation
Pop	2	2	unité : sommets à même distance de y'y et de part et d'autre de y'y	AE	unité : valeurs opposées pour V25 et mêmes valeurs pour V26	A
Qop	3	2	unité : sommets à même distance de x'x et de part et d'autre de x'x	AE	unité : valeurs opposées pour V29 et mêmes valeurs pour V210	A
Cop	3	2	unité : points sur y'y symétriques par rapport à O	AE	unité : valeurs opposées pour V17 et mêmes valeurs pour V18	A
Beg	4	2	unité : sommets sur la même verticale	AE	unité : mêmes valeurs pour V14 et mêmes valeurs pour V15	A
Bop	4	2	unité : sommets à même distance de y'y et de part et d'autre de y'y	AE	unité : valeurs opposées pour V14 et mêmes valeurs pour V15	A
Aord	4	> 2	variables : amplitude et orientation de l'ouverture	N	variables : les unités Vi1 et Vi2	N F, N S
Cord	3	> 2	variable : position du point sur y'y	AE	variables : V17 et V18	A
Pord	3	> 2	variable : distance du sommet à x'x	AE	variables : V25 et V26	A
Qord	3	> 2	variable : distance du sommet à y'y	AE	variables : V29 et V210	A

Tableau 5-1-28 : Les savoirs atomiques selon différents critères.

Les tableaux montrent que :
- Pour le critère nombre d'objets :

a) Les pourcentages de réussite sur les savoirs relatifs à un seul objet sont compris entre 50% et 87% et ces savoirs appartiennent essentiellement aux classes C1 et C2.

b) Les pourcentages de réussite sur les savoirs relatifs à deux objets sont compris entre 50% et 80% et ces savoirs occupent essentiellement les positions 2 et 3.

c) Les pourcentages de réussite des savoirs relatifs à plus de deux objets sont compris entre 26% et 70% et ces savoirs occupent essentiellement la position 3.

ce qui tend à montrer que la difficulté croit avec le nombre d'objets sans que ce critère soit à lui seul déterminant.

- Pour le critère adéquation/non adéquation entre unités perceptives et unités symboliques :

a) Il n'y a pas, dans l'ensemble, de différences significatives par rapport à la réussite entre les savoirs présentant une adéquation et les autres.

b) La non-adéquation résultant de l'absence du symbole "signe" ou de l'opposition sémantique de l'unité symbolique "signe" avec l'unité perceptive associée ne semble pas poser problème aux élèves ; les réussites par exemple, aux savoirs SP et SA où il n'y a pas d'adéquation sont meilleures que celles correspondant aux savoirs SC et SQ où l'adéquation existe.

c) Dans le cas des savoirs RS++, RS--, RS+- et RSeg qui ont des caractéristiques très proches (même nombre d'objets, même type d'objets perceptifs : anciens et élémentaires, mêmes unités symboliques R et S) le critère joue ; le savoir RSeg qui présente une non adéquation formelle et sémantique est moins connu par les élèves que les deux savoirs RS-- et RS++ qui présentent tous les deux une non-adéquation formelle. Ils sont à leur tour moins connus que le savoir RS+- où il y a adéquation entre unités perceptives et unités symboliques.

- Pour le critère ponctuel/global :

a) Les pourcentages de réussite sur les savoirs ponctuels sont compris entre 30% et 87% et ces savoirs occupent toutes les positions.

b) Les pourcentages de réussite sur les savoirs globaux sont compris entre 70% et 87% sauf pour Aord (26%) et ces savoirs occupent les positions 1, 2 et 4,

c) En majorité, les savoirs ponctuels sont moins connus que les savoirs globaux excepté Aord.

Remarquons que les seuls savoirs considérés comme complexes (page 114) : Beg, Bop, Aord, sont de loin les moins connus, mais Cord que nous n'avions pas considéré comme complexe est quasiment au même niveau.

L'analyse de hiérarchie des savoirs mis en jeu dans les trois formes met, nous semble-t-il, en évidence la complexité de l'analyse de la difficulté relative des savoirs concernés par l'articulation des registres algébrique et graphique de représentation. Elle montre en effet que:

- L'analyse en termes d'adéquation/non adéquation entre unités perceptives et unités symboliques, semble pertinente pour la hiérarchisation de savoirs mettant en jeu les mêmes unités perceptives et les mêmes unités symboliques (par exemple : les savoirs RS..). De façon plus globale, elle n'est pas aussi efficace.

- Le nombre d'objets (parabole-équation) mis en jeu par un savoir, semble jouer dans sa difficulté. Elle augmente en moyenne avec ce nombre.

- Enfin, la distinction souvent faite dans les recherches entre savoirs ponctuels et savoir globaux ne semble pas particulièrement bien adaptée à la hiérarchisation des savoirs concernés ici. Ce que l'on observe plutôt ici est une hiérarchie selon la réussite du type :

global simple >	ponctuel	>	global complexe.

En résumé, les différents critères jouent dans la hiérarchisation relative des savoirs, mais aucun n'est déterminant à lui seul. L'analyse ne peut donc privilégier exagérément un seul regard.

II-5) CONCLUSION

La comparaison des résultats entre pré-test et post-test montre que :

a) L'amélioration des connaissances, limitée dans le cas de P1, a permis une position beaucoup plus naturelle pour P3.

b) Entre pré-test et post-test il y a eu globalement un progrès net : la réussite globale associée à l'ensemble des connaissances qui sont mises en jeu par les tests, est passée de 13% avant la session informatique à 59 % après.

c) L'amélioration sur les connaissances globales sur les coefficients est d'autant plus importante que ces connaissances sont plus simples. Elle est plus nette dans le cas des connaissances sur C, P et Q, et R et S c'est-à-dire sur des connaissances relatives aux coordonnées des points caractéristiques d'une parabole. En effet, les pourcentages de réussite associés à ces coefficients sont passés respectivement de 3 % à 53 %, de 15 % à 72% et de 5% à 56 %.
Comme on pouvait s'y attendre, ce sont les connaissances manifestées sur B qui expriment (implicitement) des relations entre les deux coefficients A et B et mettent en relations deux paraboles à la fois qui ont été les moins affectées par l'amélioration. La proportion correspondante est passée de 6 % à 27 %.

d) La légère disparité entre les niveaux de maîtrise des différentes connaissances atomiques liées à chacun des coefficients P, Q, R, S et C qui existait au pré-test a disparu lors du post-test.
Mais les niveaux de maîtrise de connaissances différents dans le cas des connaissances atomiques liées à A et B qui existaient au pré-test sont aussi présents au post-test.
Ce phénomène semble exprimer que les connaissances sur les coefficients P, Q, R, S et C, très partielles au pré-test, sont devenues globales au post-test : Il n'y a plus tellement lieu de distinguer toutes les sous-connaissances atomiques introduites. En revanche, les connaissances sur A restent partielles au post-test, selon une hiérarchie de difficultés qui est la suivante :

signe	<	Taille	<	ordre

L'existence de ces deux niveaux de maîtrise des savoirs sur les coefficients, partiel et global, et les évolutions différenciées constatées contribuent à justifier à nos yeux la pertinence cognitive de l'outil "savoir atomique" introduit.

III) CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent donc un effet global positif de la séance informatique sur les connaissances répertoriées mises en jeu par le logiciel. Mais si ces résultats attestent d'un apprentissage qui résulte de la séance, on ignore comment cet apprentissage se produit en séance, on ignore les processus qui le sous-tendent dont la connaissance pourrait permettre un pilotage plus efficace du logiciel et de l'enseignement. C'est pourquoi, les résultats étant attestés, il nous semble indispensable de mettre ces résultats en rapport avec l'analyse du comportement des élèves dans la séance informatique. Pour analyser le travail en séance, nous avons préparé, dans un premier temps, une grille d'analyse.

Dans les sections suivantes, nous allons tout d'abord présenter la fiche élaborée pour cette première analyse du travail de l'élève, une fiche devant a priori permettre d'étudier l'évolution des connaissances en cours de séance (évolution étudiée relativement aux connaissances atomiques manifestées dans la séance). Nous reviendrons ensuite sur les rapports pré-test/post-test. Nous montrerons aussi, à titre d'exemple, certains "travaux" d'élèves pendant la séance. Enfin, d'autres méthodes d'analyse statistiques seront ensuite utilisées pour essayer de dégager des facteurs favorisant ou défavorisant l'apprentissage. Les résultats de ces analyses doivent contribuer aux réponses aux questions principales de notre recherche.

CHAPITRE V- PARTIE II

SEANCE INFORMATIQUE ET EXEMPLES DE TRAVAUX D'ELEVES

SEANCE INFORMATIQUE

La séance informatique s'est déroulée au mois de décembre une semaine après le pré-test, une journée pour la classe de première, une autre pour la terminale. Il y avait 16 élèves en première et 17 en terminale. Puisque la salle informatique disposait de 6 machines en nanoréseau et que le travail prévu était individuel, chaque classe était partagée en 3 groupes. En Première ces derniers sont notés g11, g12 et g13. Ils sont formés respectivement de 6, 6 et 4 élèves. En Terminale, ils sont notés g21, g22 et g23 et sont formés respectivement de 6, 6 et 5 élèves. Chaque élève a disposé d'une heure de travail avec la machine à l'exception de deux élèves de première du groupe g12, de niveau faible, qui selon leur souhait ont continué à travailler pendant une heure supplémentaire avec les élèves du groupe g13. Chacun des 6 groupes a été formé d'élèves du groupe G1 qui rencontreront des paraboles de type P1 et de type P3, et d'élèves du groupe G2 qui rencontreront des paraboles des deux types P2 et P3.

I) SCENARIO ET DEROULEMENT

La séance s'est passée, pour les deux classes, selon le scénario suivant :

1) La salle informatique étant préparée, les machines allumées, le programme diffusé dans les postes, devant chaque poste se trouve une fiche de 2 pages portant sur l'utilisation du logiciel, accompagnée de feuilles blanches qui peuvent être utilisées comme brouillon sur lesquelles sont inscrits le nom de l'élève, le code du groupe de séance gij et le code du groupe Gi.

2) La classe se regroupe dans la bibliothèque dont une porte ouvre sur la salle informatique. Nous expliquons aux élèves le jeu, ses règles et le mode d'utilisation du logiciel. Nous leurs lisons les indications de la fiche d'utilisation, nous répondons à leurs questions à ce sujet. Nous indiquons à chacun son groupe de séance et leur rappelons leur groupe de travail et les types de paraboles qu'ils ont à traiter. Nous leur rappelons aussi que cette activité ne sera pas notée et que toutes leurs entrées seront enregistrées automatiquement par la machine. Nous leur mentionons enfin qu'il est souhaitable, du point de vue recherche ainsi que du point de vue engagement scolaire de leur part, qu'ils accordent l'intérêt nécessaire à ce travail.

3) Lorsque notre intervention se termine, la bibliothèque sert comme salle d'attente aux élèves qui pendant ce temps peuvent faire ce qu'ils veulent. Tour à tour, les groupes entrent dans la salle informatique. Une fois que pour un groupe la séance est terminée, il quitte la salle informatique directement pour la cour de récréation.

Les élèves choisissaient librement, pour chaque exercice le type d'équation parmi les deux possibles. Dix seulement ont utilisé les feuilles de brouillon mises à leur disposition. Les autres ont travaillé directement sur la machine. Les élèves étaient motivés. Ils étaient contents lorsqu'ils réussissaient un exercice et vexés dans le cas contraire.

Les élèves de première étaient en général dans une ambiance de jeu. Lorsqu'ils trouvaient la bonne réponse, ils annonçaient leur succès en haussant au maximum le son de leurs machines pour que tout le monde écoute la musique triomphante qui l'accompagnait. Ils manifestaient -sans bruit- leur déception dans le cas d'échec. Les élèves de terminale étaient plutôt dans une ambiance d'apprentissage.

A la fin de la séance tous les élèves ont pris soin de terminer l'exercice qu'ils avaient commencé et certains ont profité de notre inattention pour commencer un nouvel exercice. La plupart des élèves ont demandé à pouvoir jouer une autre fois avec le logiciel.

Pour illustrer ce qui s'est passé en séance, nous présenterons certains travaux d'élèves, à partir de la méthode d'analyse fine des fichiers basée sur l'identification des stratégies étudiée dans l'analyse a priori. Nous avons groupé ces travaux en fonction des stratégies qui y sont observées, et avons choisi des travaux "typiques" de ce point de vue. Nous préciserons tout d'abord, la méthode de reconnaissance et d'identification des stratégies à partir des traces recueillies, utilisée.

II) TACTIQUES OBSERVEES ET STRATEGIES

Par stratégie, dans le chapitre IV, nous avons désigné un plan d'actions coordonnées supposé entrepris par l'élève dans le but de trouver l'équation de la parabole tracée à l'écran. Il est clair que tous les comportements sur un exercice ne peuvent s'interpréter en ces termes.

Les actions essentielles qui ont été à la base de notre analyse a priori des stratégies possibles peuvent être classées en trois catégories : les actions logiciel (Afficher des coordonnées, Tracer une parabole, et Proposer une réponse), les actions mathématiques de calcul (Former une équation, Ecrire un système d'équations, Réduire un système d'équations, Résoudre un système d'équations) et les actions mathématiques de lecture et d'estimation (Lire des coordonnées, Lire un coefficient, Estimer un coefficient). Lors de l'exécution de la stratégie supposée, dans la séance informatique, certaines seulement de ces actions seront détectées, et enregistrées par la machine : ce sont les actions logiciel C, T et R ; les autres ne le sont pas. Les actions calcul peuvent être connues s'il y a un brouillon qui porte leurs traces. Les actions de lecture et d'estimation sont à inférer des autres actions.

Il n'est pas facile, en général, de remonter des actions observées et de leurs paramètres aux stratégies de travail. Cette tâche devient plus difficile encore lorsqu'elle porte comme ici sur des traces incomplètes des travaux des élèves.

Nous savions dès le début que le fichier élève ne pouvait pas contenir tous les éléments nécessaires à la reconstruction de la stratégie supposée. Nous espérions combler, au moins partiellement, ce manque d'éléments par les informations recueillies en séance et les brouillons des élèves. Malheureusement, la plupart des élèves n'ont pas utilisé leurs brouillons et ceux ramassés n'étaient pas riches en informations. Certains y ont inscrit seulement des équations ou des systèmes d'équations sur les coefficients (pour la plupart à l'état brut) ainsi que des propositions de réponses.

Un fichier élève contient donc les actions détectables par la machine et effectivement exécutées par l'élève lors de sa recherche. Ces actions constituent ce qu'on peut appeler les tactiques de recherche. Ces tactiques sont en fait la suite des options choisies par l'élève dans la séance. les options étant, bien entendu, "Coordonnées", "Tracé" et "Réponse". C'est par l'intermédiaire de ces tactiques que nous allons essayer de remonter aux stratégies éventuellement utilisées.

Dans ce qui suit nous identifions ainsi un certain nombre de tactiques. Nous décrivons ces stratégies par les options utilisées, les connaissances atomiques impliquées, éventuellement certaines argumentations d'élèves les ayant adoptées. Nous formulons leurs liens possibles avec des stratégies. Comme on le constatera aisément, il n'y a pas de traduction automatique possible, excepté dans certains cas limites, en termes des stratégies identifiées dans l'analyse a priori.

Les données amènent à distinguer en fait trois types de tactiques :

TACTIQUES A UNE OPTION DOMINANTE

C : utilise, pour tous les exercices de la séance d'une façon dominante, l'option "Coordonnées" et évidemment l'option "Réponse". C'est une procédure favorisée par l'enseignement traditionnel.
C regroupe toutes les stratégies ponctuelles et met en jeu essentiellement la connaissance sur l'interprétation algébrique de l'appartenance d'un point à une parabole.

Nous faisons l'hypothèse qu'elle peut être utilisée pour **les raisons suivantes** :
- raisons positives :

1) Je sais trouver les coordonnées de 3 points, ça me permet d'écrire 3 équations dont les inconnues sont les coefficients et j'en déduis les coefficients.

2) Je lis C et je sais trouver 2 équations en A et B à partir de 2 points dans le cas de P1. Dans les deux autres cas, je lis deux coefficients et je trouve une équation en A à partir d'un point. Ainsi, dans tous les cas, je trouve les coefficients.

- rejet d'autres options :

3) L'option T ne me dit rien. Je ne vois pas comment T peut me rapprocher de la solution. C me permet de trouver les coordonnées des points et d'écrire des équations et ça, je sais faire.

Dans la pratique, l'élève qui exécute la démarche décrite en 1), s'il ne choisit pas d'une façon pertinente les points, va rencontrer dans le cas de P2 ou P3, des équations hors de sa portée. Le choix pertinent des points conduit en réalité à la démarche 2. La démarche 3 n'est pas claire, et il est très probable qu'elle ne conduit pas à la réussite. La démarche 1 nous renvoie aux stratégies ponctuelles brute et élaborée, 2) conduit à la stratégie ponctuelle élaborée adaptée au type tandis que 3) ne figure pas parmi les stratégies déjà mentionnées dans notre analyse.

La tactique C peut donc traduire une stratégie stable comme elle peut traduire une stratégie évolutive. Pour identifier la stratégie à laquelle elle renvoie, il faut étudier les coordonnées des points demandés et considérer peut-être une suite de plusieurs types pour décider s'il s'agit effectivement d'une stratégie adaptée au type.

T : utilise, pour tous les exercices de la séance et d'une façon dominante, l'option "Tracé" et évidemment l'option "Réponse" parce que, même si le tracé est correct, il est nécessaire de fournir une réponse au moyen de l'option R.

Elle regroupe les stratégies globales d'essai-erreur et de lecture-estimation. Les réponses proposées doivent permettre de voir les relations avec ces stratégies globales.

Les raisons d'adoption peuvent être :

- rejet de C :

1) Je ne maîtrise pas le traitement de la question au moyen de l'option C. J'évite C, je vais essayer T.

- intérêt pour T:

2) Je sais comment faire. Je fais des tracés et j'essaye de les faire correspondre avec la parabole.

- lecture/estimation :

3) Je sais lire certains coefficients, j'ai une idée sur les autres, je fais des estimations sur leurs valeurs, et comme je ne suis pas assez sûr, je fais le tracé correspondant avant de donner ma réponse.

Selon 1) l'élève fuit C, selon 2) il affiche un intérêt à l'idée d'une nouvelle approche : l'approche graphique, selon 3) il a des connaissances suffisamment solides sur les coefficients qui nous laissent supposer qu'il est aussi capable d'exploiter C. Or cette démarche d'estimation, coûteuse surtout dans le cas de P1, peut être améliorée par l'utilisation de C (cf. Tactiques mixtes ci-après). Soulignons que pour P1, la démarche de lecture/estimation pure a peu de chance d'aboutir. En revanche, l'association entre C et T comme nous le verrons par la suite peut-être tout à fait performante car efficace et peu coûteuse sur le plan conceptuel.

R : utilise, pour tous les exercices de la séance, d'une façon dominante, l'option "Réponse". Elle regroupe les stratégies d'essai/erreur et de lecture/estimation. Nous faisons l'hypothèse que cette procédure, sauf en cas de capacité de réponse directe, est adoptée au départ par les élèves qui voient dans la recherche de l'équation un simple jeu. Il y a donc peu de chances que R soit gagnante d'emblée dans la séance. Mais le coût informatique de R étant élevé (dans le logiciel), le nombre de coups par exercice est faible et cette tactique permet, a priori, de traiter beaucoup d'exercices à défaut de réussir.

TACTIQUES MIXTES

C,T : utilise, pour tous les exercices de la séance, l'option "Coordonnées" et l'option "Tracé", et évidemment l'option "Réponse". Elle regroupe les stratégies ponctuelles sécuritaires et les stratégies globales optimisées.

Raisons possibles :

- C puis T :

1) T pour contrôle : j'utilise C pour former le système d'équations, je le résouds, ce qui n'est pas toujours évident, je m'assure de ma proposition en faisant un tracé par T.

2) Echec de C : C me conduit parfois (surtout dans le cas de P2 ou P3), à des équations difficiles à 3 inconnues et je risque de ne pas aboutir à la bonne réponse. J'essaye de trouver une aide en utilisant T.

Cette dernière démarche risque de se rapprocher de la stratégie lecture estimation.

- T puis C :

3) Echec de T : je démarre avec T dans une logique d'essai/erreur. Ça n'aboutit pas. Je recours à C.

- C et T :

4) Question d'optimisation : Je sais utiliser C. Je sais utiliser T. Je peux les utiliser à la fois pour optimiser le coût. C permet parfois de simplifier la recherche (cas de P1). A un certain moment il semble qu'il suffit de tester ma proposition avec T (cas P2 ou P3).

L'adoption de cette tactique renseigne sur un choix plus sécuritaire que CR, si ce n'est pas un passage obligatoire, vu l'impasse possible avec C.

TACTIQUES DE TRANSITION VERS LE JEU

C,R : utilise, pour tous les exercices du début de la séance, l'option "Coordonnées" et évidemment l'option "Réponse", mais pour les exercices de la fin elle utilise uniquement l'option "Réponse".

Raisons possibles :

1) Passage d'une démarche d'apprentissage au jeu complet : j'utilise C puis je me rends compte que c'est trop coûteux et que ce n'est pas facile. Je laisse tomber C et je me mets à jouer.

2) Adaptation au jeu : j'utilise C que j'améliore depuis la stratégie de base. Quand je suis familiarisé avec l'ouverture et que je me sens capable de répondre en un ou deux coups, j'utilise uniquement R. Ça marche assez bien avec P2 et P3. C'est délicat avec P1, pour les raisons déjà soulignées, surtout si le coût de R est grand.

L'adoption de cette procédure semble indiquer parfois une tendance précautionneuse à jouer le jeu imposé par le logiciel.

T,R : utilise, pour tous les exercices du début de la séance, l'option "Tracé" et évidemment l'option "Réponse", mais pour les exercices de la fin elle utilise uniquement l'option "Réponse". Elle regroupe les stratégies globales.

Raisons possibles :

1) Nécessité de prendre en compte les feed-back dans la démarche graphique: j'utilise T puis je me rends compte que c'est peu efficace, trop coûteux et que ce n'est pas facile. R est plus coûteuse mais en revanche elle inclut une validation partielle des réponses puisqu'elle indique à côté du tracé si dans ma proposition il y a de bons coefficients et lesquels. Je laisse tomber T et je me mets à jouer directement avec R.

2) Adaptation de la démarche lecture/estimation au jeu : j'utilise la stratégie lecture/estimation de base et quand je suis familiarisé avec l'ouverture et que je sens capable de répondre d'un seul coup j'utilise uniquement R. Ça marche assez bien avec P2 et P3. C'est délicat avec P1.

C,T,R : utilise, pour tous les exercices du début de la séance l'option "Coordonnées" et l'option "Tracé", et évidemment l'option "Réponse" mais, pour les exercices de la fin, elle utilise uniquement l'option "Réponse".

Raisons possibles :

1) Nécessité de prendre en compte les feed-back dans les démarches possibles avec **C,T**

2) Adaptation de la démarche optimisée de **C,T** au jeu

Les effectifs de ces tactiques observables et observées dans la séance sont donnés par le tableau suivant :

Tactique	C	T	CT	R	CR	TR	CTR
Effectif	1	5	2	7	8	2	8

Nous remarquons d'une part trois tactiques à très faibles effectifs : C, CT et TR, d'autre part, la forte proportion des tactiques stables sur R ou s'achevant par R (25 élèves concernés) : R, CR et CTR, ceci montrant que R occupe une place particulière. Le rejet de C et CT ne nous étonne pas vu l'analyse a priori. Le nombre relativement élevé d'élèves choisissant R de façon stable sur la séance laisse penser qu'un nombre non négligeable d'élèves se considère dans une situation de jeu pur. En ce qui concerne les tactiques se terminant par R, notre analyse a priori a prévu deux possibilités : refuge dans le jeu pur ou capacité construite de réponse quasi-directe. Il semble bien que ces deux possibilités interviennent comme le montrent les deux protocoles que nous présentons ci-après.

III) EXEMPLES DE FICHIERS

a) LE FICHIER DE MICHEL

Michel est un élève de terminale D. Son niveau est très faible. Il passe son temps "à copier" des programmes sur sa calculatrice programmable. Il a un compatible P.C. chez lui. Il est très motivé par l'idée de travailler avec le logiciel. C'est un élève du groupe G1 ; il peut donc traiter pendant la séance des exercices portant sur les formes P1 et P3. Pendant la séance, il n'écrit rien sur son brouillon.
Michel commence sa session en choisissant la forme P1.

Exercice 1 :

P1 :	-2	8	1	Parabole $-2x^2 + 8x + 1$
T :	-4	4	4	
C :	2	9		
T :	-1	15	61	
T :	-1	3	15	
T :	-1	3	3	
R :	-2	5	5	

Rappelons que P1 désigne la forme d'équation $y = A x^2 + B x + C$ et que les valeurs qui suivent sont respectivement les valeurs de A, B et C qui correspondent au tracé dont il faut trouver l'équation. T, C et R sont les actions Tracer, Afficher coordonnées et Réponse. Les nombres fournis après T ou R sont les coefficients de la parabole et les nombres qui suivent C sont les coordonnées affichées.

L'option dominante dans cet exercice est T. La valeur 4, qui est à la base du premier tracé, est la valeur entière la plus proche de l'abscisse d'un des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses. Les coordonnées affichées ensuite sont celles du sommet. Apparemment les tracés et la réponse fournis par la suite ne résultent pas de calculs exploitant ces coordonnées. Le signe de A est correct sur tout l'exercice et la valeur de A proposée en réponse, après épuisement du capital, est correcte.

Exercice 2:

P1 :	1	-5	9	Parabole $x^2 - 5x + 9$
T :	2	2	2	
T :	4	2	3	
T :	8	2	1	
T :	2	2	3	
R :	1	2	2	

T est toujours dominante et le jeu se fait simultanément sur A et C alors que le coefficient B reste fixé à la valeur 2 (valeur proche de l'abscisse du sommet) dans les tracés et la réponse. Les valeurs proposées pour C montrent que sa signification n'est toujours pas comprise. A est ajusté correctement pour la réponse.

<u>Exercice 3</u> :

P1 :	-3	5	6	Parabole $-3x^2 + 5x + 6$
C :	0	6		
T :	-1	2	2	
T :	-1	4	2	
T :	-2	6	1	
R :	-1	8	1	

L'état de connaissance semble stationnaire : le signe des coefficients est correct, et c'est la seule connaissance apparente. Le fait de faire afficher les coordonnées de l'intersection avec l'axe Oy n'est pas exploité au niveau de C. Il n'y a pas, au dernier moment, l'ajustement de A réussi dans les deux exercices précédents.

Le comportement de Michel ne varie donc pas sur ces 3 exercices avec P1 : la stratégie dominante est une stratégie de tracés. Les coordonnées de points particuliers de la parabole apparaissent régulièrement dans les coefficients des tracés : une fois, celle de l'un des points d'intersection avec l'axe des abscisses, une autre fois, celles du sommet. Le signe de A est correct. Il n'y a pas de connaissance sur C manifestée. Au bout de 3 échecs, Michel change de forme. Le passage à la forme P3 est sans doute le signe d'un certain découragement.

<u>Exercice 4 :</u>

P3 :	1	4	1	Parabole $(x - 4)(x - 1)$
T :	2	-4	-16	
T :	-1	0	0	
T :	2	10	8	
R :	-36	-80	7	

Ce changement de forme s'accompagne d'une perturbation des connaissances manifestées antérieurement sur le signe de A. On ne note pas de connaissances manifestées sur R et S.

<u>Exercice 5</u> :

P3 :	-2	8	1	Parabole $-2(x - 8)(x - 1)$
C :	0	-16		
T :	-2	-4	240	
T :	-2	8	-8	

R :	-2	2	2
R :	-3	2	2

Les coordonnes affichées (du point de la parabole sur Oy) ne semblent pas utilisées. La valeur de A est correcte dès le départ, mais dans la deuxième proposition c'est justement cette valeur qui est modifiée. Dans le deuxième tracé, R est trouvé mais n'est pas exploité par la suite. Une évolution semble en germe vers une stratégie de type "réponse".

Exercice 6 :				
P3 :	1	-2	2	Parabole (x + 2) (x - 2)
R :	-4	-2	2	
R :	4	2	0	
R :	4	2	2	

Stratégie R : Réponses directes. A propos de la première réponse, on peut formuler deux hypothèses : lecture graphique de R et S ou utilisation des coordonnées non nulles des points d'intersection avec les axes. On note une rectification du signe de A mais pas d'estimation correcte. Les valeurs correctes de R et S, pourtant signalées comme telles par la machine, ne sont pas reprises toutes les deux dans la deuxième réponse : seule la valeur positive est conservée. Les coefficients de la dernière réponse sont apparemment les valeurs absolues des coordonnées non nulles des points sur les axes (4 peut être interprété comme la valeur absolue de l'ordonnée du sommet sur Oy).

Exercice 7 :				
P3 :	1	-4	-1	Parabole (x + 4) (x + 1)
R :	-7	-5	-1	
R :	6	4	-1	
R :	2	-2	-1	

Peut être une occasion manquée : la première réponse peut en effet s'interpréter comme une lecture graphique de R et S erronée. -1 est reconnue comme correcte par la machine et conservée par Michel pour tous les autres essais. La seconde réponse peut correspondre à un essai de correction de l'erreur de lecture, mais sans prise en compte du signe. Dans la dernière réponse, notons que les deux premières valeurs sont, en valeur absolue, les valeurs entières les plus proches des coordonnées du sommet (-2,5 ; - 2,25). On peut penser que le changement de signe est lié au souci de prendre en compte le signe de A.
Que cette hypothèse soit vraie ou non, il n'y a pas à notre avis de sens manifesté pour R et S, bien qu'une racine soit trouvée et conservée de manière stable, puisqu'il n'y a pas transfert à l'autre racine. Pas de sens, non plus, semble-t-il pour A. Echec sur P3.

Michel traite ainsi, avec la même stratégie, 4 exercices de type P3 : des tracés et réponses directes, certains des coefficients correspondant aux coordonnées de points particuliers des paraboles. Le signe de A redevient correct mais on ne voit pas apparaître des connaissances sur R et S. Après ces échecs successifs sur P3, Michel revient à la forme P1.

Exercice 8 :

P1 :	-1	-2	-2	Parabole $-x^2 - 2x - 2$
T :	-2	2	2	
T :	-2	-2	-2	
R :	-3	-2	-2	
R :	-1	-2	-2	

C'est la première réussite. On pourrait penser que l'interprétation de C est enfin comprise puisque la valeur -2 est proposée pour C trois fois de suite, mais on peut avoir de légers doutes vu que (0,-2) est le seul point d'intersection avec les axes, sachant la propension de Michel à exploiter les coordonnées des points particuliers des paraboles dans ses propositions. Ces doutes se trouvent confirmés dans les deux exercices qui suivent : la réussite ne se réitère pas.

Exercice 9 :

P1 :	-1	1	3	Parabole $-x^2 + x + 3$
R :	3	2	-1	
T :	-3	2	2	
R :	-3	3	2	

La même hypothèse sur la démarche peut être faite ici aussi. Les racines du trinôme sont $(-1-\sqrt{13})/(-2) \cong 2{,}3$ et $(-1+\sqrt{13})/(-2) \cong -1{,}3$. Les valeurs proposées dans la première réponse résultent, apparemment, d'une lecture erronée des coordonnées non nulles des points sur les axes : 3 pour l'une et environ 2 et -1 pour les autres. Les autres propositions semblent mettre en jeu (à un signe près) certaines de ces valeurs.
Le signe de A est corrigé mais aucun sens pour C, la taille et l'ordre sur A.

Exercice 10 :

P1 :	-2	9	-10	Parabole $-2x^2 + 9x - 10$
R :	-2	2	-2	
R :	-2	1	-1	
R :	-1	0	0	

Michel adopte une stratégie de réponse directe et en conservant semble-t-il la même démarche : 2 et 2,5 sont les abscisses des points sur Ox.
La bonne valeur de A, bien que signalée par la machine, n'est pas conservée dans la dernière réponse. Mais on peut penser qu'il s'agit d'une erreur de frappe, ce qui expliquerait que

Michel complète cette réponse par 0, 0. Michel retourne ensuite à P3. Peut-être faut-il y voir encore une fois un signe de découragement.

Exercice 11 :				
P3 :	-3	1	-3	Parabole -3 (x - 1) (x + 3)
R :	13	2	-3	
R :	2	13	0	
R :	2	3	-3	

La stratégie de réponse directe se confirme et sera stable jusqu'à la fin de la session. Nous l'interpréterons comme un refuge définitif dans le jeu pur. Même les connaissances manifestées précédemment sur A semblent déstabilisées. La valeur 13 proposée à deux places différentes peut être interprétée comme le résultat d'une lecture erronée de l'ordonnée du sommet (-1;12) et correspondre donc à la stratégie usuelle de Michel.

Dans les trois exercices suivants, Michel ne semble même plus utiliser les coordonnées des points remarquables dans les réponses, réponses, semble-t-il, données au hasard.

A plusieurs moments, lors de la lecture du fichier, nous avons senti qu'en l'absence d'autres traces du travail de Michel, nous avions des difficultés à interpréter son travail. Le pourquoi a été toujours présent. Pourquoi les coordonnées de tel point ont-elles été affichées ? Pourquoi telles valeurs des coefficients ont-elles été fournies dans un tracé ou dans une réponse? Est-ce un choix délibéré ou arbitraire ? Y-a-t-il des théorèmes implicites, vrais ou faux, à la base de son fonctionnement et si oui lesquels ?
En faisant des hypothèses et en essayant de les confirmer ou de les infirmer, sur la base de leur compatibilité avec la suite, nous avons pu, malgré ce manque d'informations, donner l'interprétation suivante du travail pendant la séance :

Au début de la séance, Michel, en affichant des coordonnées de points caractéristiques de la parabole en question et en faisant des tracés, semble penser que les coefficients de l'équation à chercher sont liés à ces coordonnées. Dans le cas de P1, il lie B à l'abscisse du sommet (exercice 2). Avec cette idée, en faisant des tracés et en tenant compte du signe de A, il ne réussit pas, pour les trois premiers exercices, à trouver la réponse. Ces échecs successifs le conduisent à passer à la forme P3. Ce passage se traduit par une déstabilisation des acquis sur le signe de A. Au cours du travail sur la forme P3, Michel ne parvient pas à donner du sens à R et S : dans un cas particulier (valeurs de R et S opposées, exercice 6), il fournit d'emblée une réponse comportant les bonnes valeurs de R et S associées à une valeur erronée de A, mais ne les conserve même pas dans les essais ultérieurs. En repassant à la forme P1 et en essayant toujours d'associer aux coefficients les coordonnées non nulles des points remarquables (excepté le sommet parfois), il réussit à trouver les coefficients dans un exercice (exercice 8). Là encore, il s'agit d'un cas particulier : B est égal à C. C'est la particularité de l'exercice qui, semble-t-il, permet à Michel de réussir. Dans les exercices suivants, sur P1, en appliquant sa démarche, Michel ne répond correctement, même partiellement, à aucun exercice. Dans la suite, lorsqu'il s'aperçoit que sa démarche n'aboutit pas à la réussite, c'est la déstabilisation presque complète, une sorte de déliquescence : Michel ne prend plus en compte ou ne semble plus capable de prendre en compte les commentaires et indications de la machine à propos des réponses fournies. Pour faire face à son échec, il se réfugie dans le jeu sans contrôle en fournissant directement des réponses.

Michel est un élève qui "désapprend". Par la réponse -1, 0 , 0 à la fin de l'exercice 10 et le changement de type qui suit, Michel déclare son "ras le bol". Dans une version tutorielle (ou plus intelligente) du logiciel, la réaction face à un tel comportement doit être claire : inutile de continuer sans proposer à l'élève une stratégie alternative.

L'utilisation du logiciel semble donc ici totalement négative. Au pré-test Michel ne donne pas de réponses. Le post-test ne montre que des connaissances sur le signe de A.

Durant la première partie de la séance, l'option T est l'option dominante. A la fin, c'est uniquement l'option R qui est utilisée. C'est un exemple qui illustre bien la stratégie observable T,R comme une stratégie essai/erreur non évolutive.

Dans l'analyse des stratégies a priori, que nous avons présentée dans le chapitre précédent, nous avons souligné que cette stratégie ne met pas nécessairement des connaissances en jeu. L'analyse de la séance selon la grille déjà élaborée donne les graphiques suivants[1] :

Cas de P1:

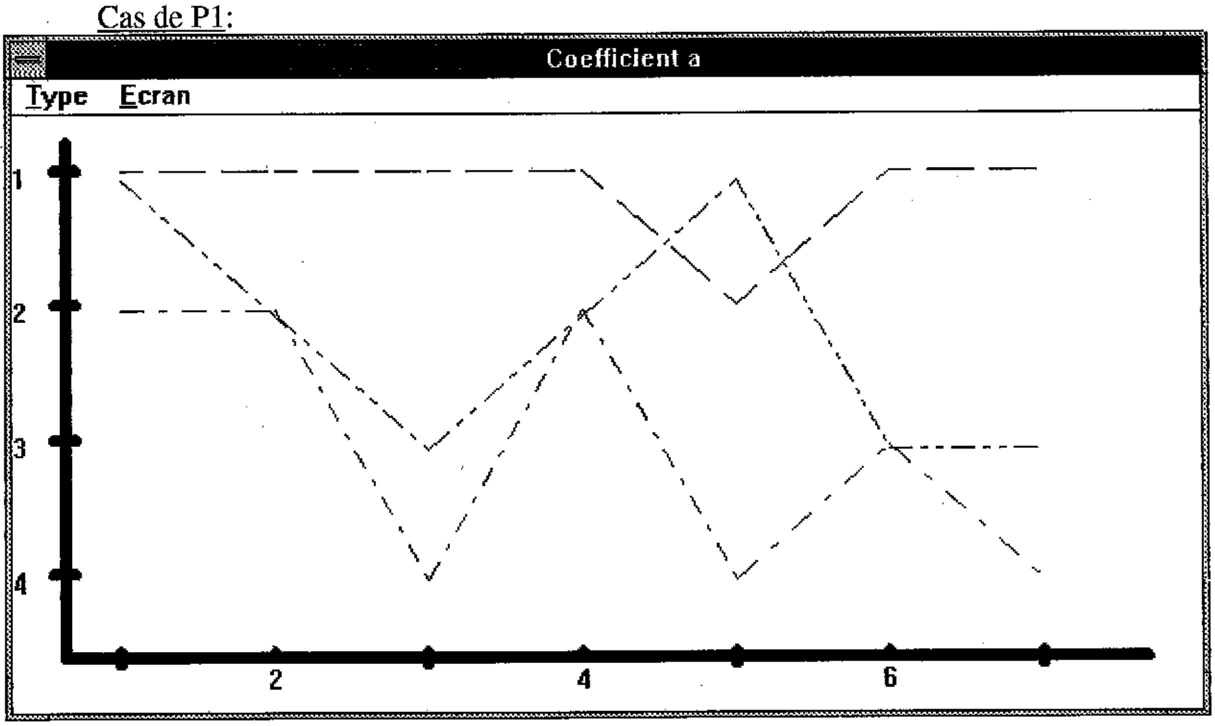


Figure 5. 2. 1: l'évolution sur A

[1]––––– : pour signe du coefficient. – – – – : pour taille du coefficient et — — — — : pour ordre.

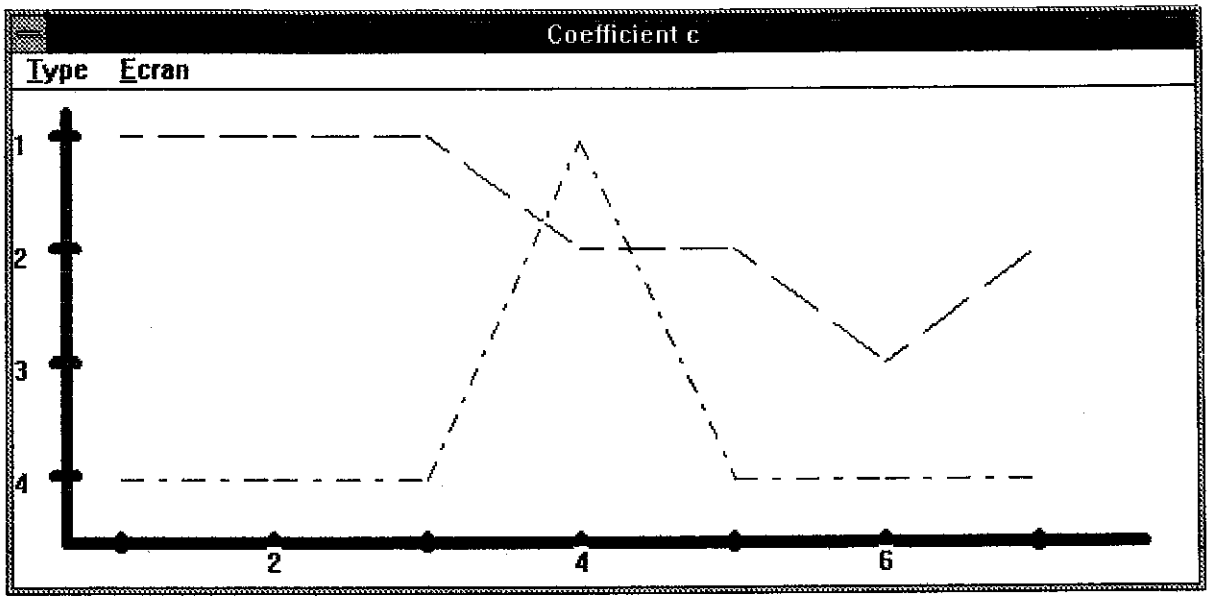


Figure 5-2-2 : l'évolution sur C

Cas de P3 :

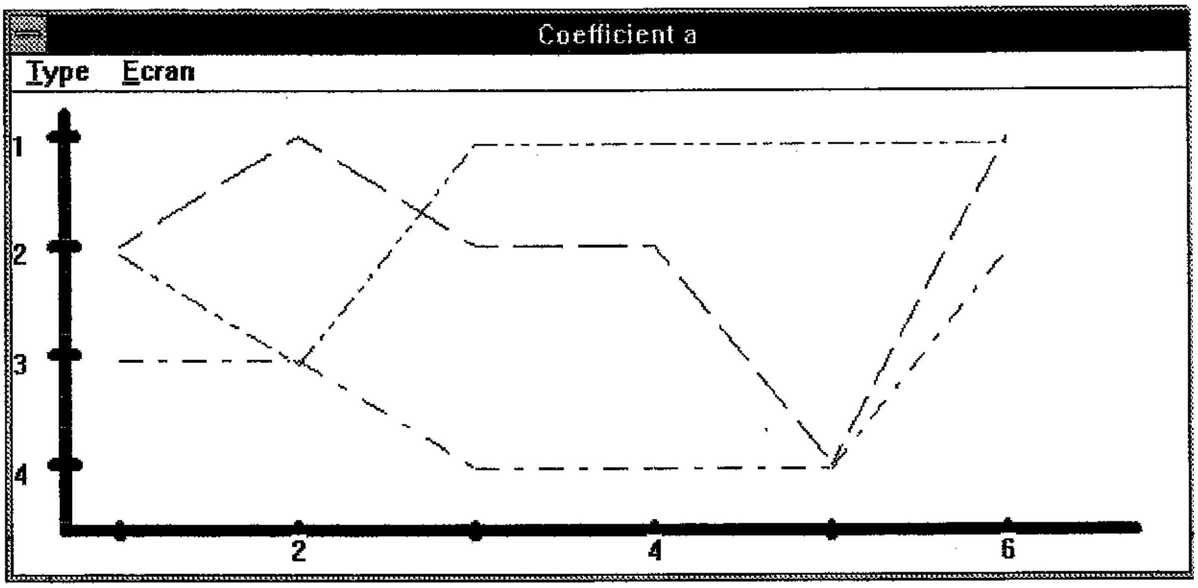


Figure 5-2-3 : l'évolution sur A

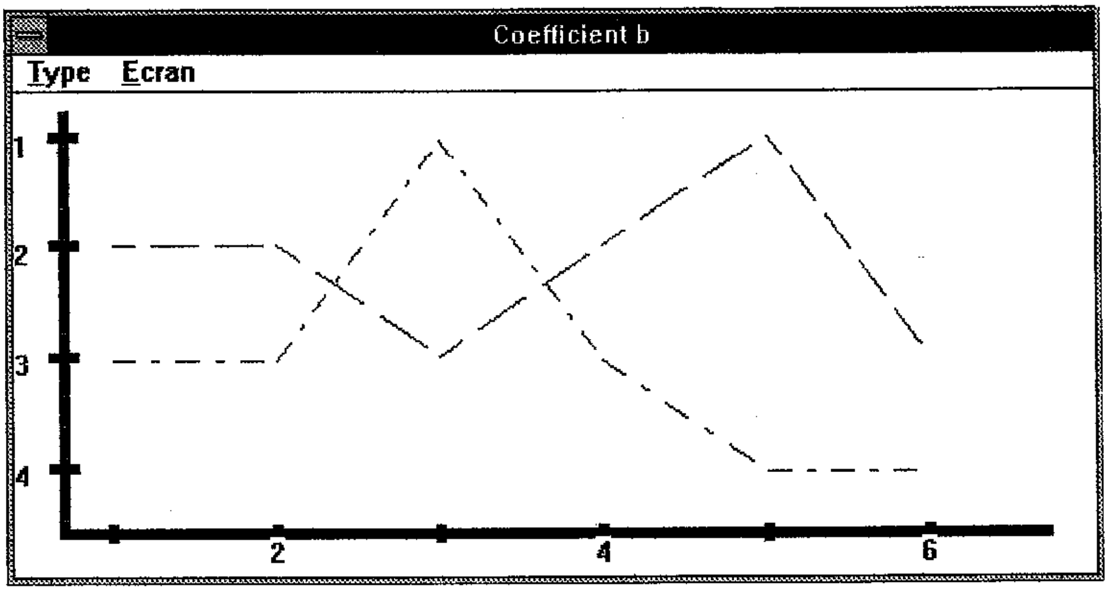


Figure 5-2-4 : l'évolution sur R

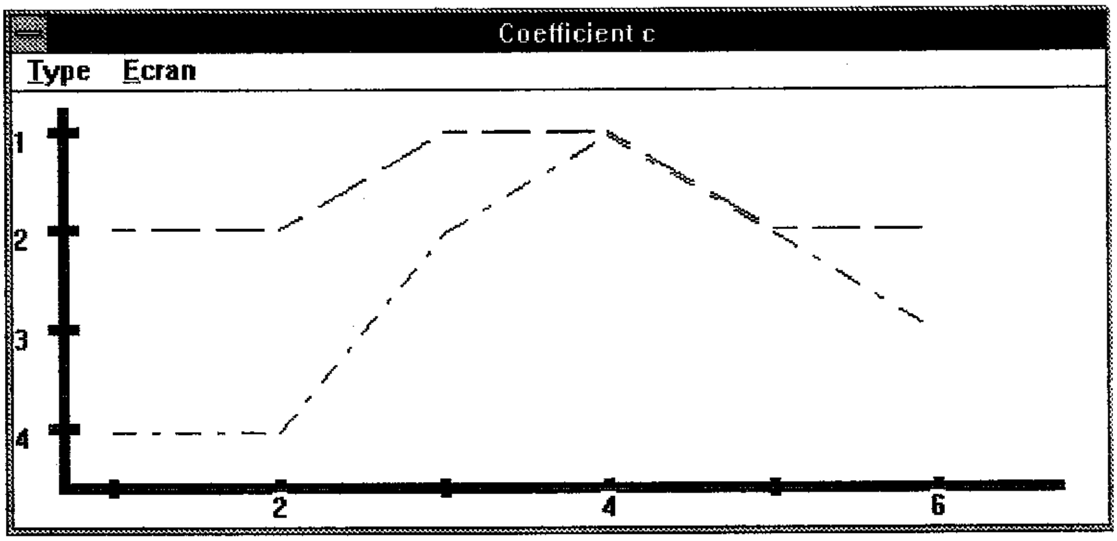


Figure 5-2-5 : l''évolution sur S

B) <u>LE FICHIER D'OLIVIER</u>

Olivier est un élève de première S, très faible et conscient de ses problèmes. Très distrait, il manque de sérieux dans son travail et dans son comportement général. Il essaie cependant de faire des efforts surtout en mathématiques. Il aime "pianoter" sur l'ordinateur. C'est un élève du groupe G1 travaillant donc, lui aussi, sur les formes P1 et P3. Il laisse un brouillon. Dans la séance, il connaît des moments de "stress" et des moments de grand plaisir. A sa demande, il prolonge sa séance d'une heure.

Il commence sa séance avec P1.

Exercice 1 :

P1 :	2	5	-2	Parabole $2 x^2 + 5 x - 2$
C :	-0,7	-4,5		
C :	-1	-5		
C :	-1,3	-4,5		
C :	-1,7	-4,7		
C :	-3	1		
T :	1	3	4	
R :	1	2	4	

C est ici l'option dominante : attitude scolaire normale. Visiblement, vu le brouillon, Olivier n'arrive pas à exploiter les coordonnées qui lui sont fournies par le logiciel et finit par proposer un tracé où seul le signe de A est correct. Dans la réponse qui suit le tracé, il ne modifie pas les valeurs de A et C pourtant erronées.
Après cet échec, il passe à P3.

Exercice 2 :

P3 :	-2	1	4	Parabole $-2 (x - 1) (x - 4)$
C :	2	4		
T :	3	-21	30	
T :	-2	18	-36	
R :	-2	-5	2	
R :	-1	1	3	

L'option coordonnées est déjà moins utilisée. Les deux tracés proposés semblent résulter du développement des expressions $3(x - 2)(x - 5)$ et $-2(x - 3)(x - 6)$ que l'on trouve sur son brouillon. La valeur de R est trouvée mais il est difficile de dire si c'est ou non le fruit du hasard. Olivier retourne à la forme P1 pour les exercices 3 et 4.

Exercice 3 :

P1 :	-2	-3	-4	Parabole $-2 x^2 - 3 x - 4$
T :	-4	2	3	
T :	-5	3	1	
T :	-3	3	4	
R :	-3	2	1	
R :	-3	-2	1	

Peut-être y-a-t-il ici changement de démarche : l'option tracé devient en effet dominante et rien ne figure au brouillon pour cet exercice. Le signe de A est respecté et la taille de A est proche de la valeur exacte. Le signe de C n'est pas respecté. Entre les deux réponses, seul B change alors que A et C sont également incorrects.

Exercice 4 :				
P1 :	3	7	6	Parabole $3x^2 + 7x + 6$
T :	1	-3	2	
T :	2	-3	2	
C :	-1	2		
C :	-0,3	4,2		
C :	0	6		
R :	1	4	5	

De nouveau, changement de démarche. T puis C mais visiblement Olivier refuse le coût calcul ou ne sait pas exploiter les coordonnées affichées (aucun calcul n'est fait au brouillon). Il n'y a pas semble-t-il de lecture de coordonnées de points particuliers dans les deux premiers tracés comme c'était le cas pour Michel et le jeu porte sur A seul, son signe est correct et les valeurs proposées raisonnables. L'affichage de l'intersection avec Oy ne débloque pas l'interprétation de C bien que le signe soit respecté. Le signe de A reste respecté mais il y a régression dans l'estimation.

On ne note pas d'évolution sensible sur P1 pendant ces quatre exercices.

Exercice 5 :				
P1 :	3	1	0	Parabole $3x^2 + x$
C :	0	0		
T :	2	-2	0	
C :	1	4		
T :	3	1	0	
R :	3	1	0	

Le fait que la courbe passe par l'origine semble jouer ici le rôle de facteur déclenchant pour l'interprétation de C. Olivier demande l'affichage de (0,0) et ensuite, dans les deux tracés demandés, la valeur de C est correcte. Olivier exploite ensuite les coordonnées affichées (1,4) en écrivant sur son brouillon $y = Ax^2 + Bx$ puis $4 = A(1)^2 + B(1)$ puis $4 = 3 + B$. Il semble qu'il ait estimé A à 3. Il teste ceci par un tracé et obtient sa première réussite.

Exercice 6 :				
P1 :	-2	-7	1	Parabole $-2x^2 - 7x + 1$
C :	-1	6		

T :	2	-3	1
T :	-2	3	1
R :	-2	-7	1

Il s'agit toujours de la forme P1 et la stratégie semble-t-il amorcée à l'exercice précédent se stabilise : lecture de C puis estimation de A et calcul au brouillon à partir d'un point affiché de la valeur de B. L'estimation de A aboutit à la bonne taille dès le premier coup mais le signe n'est pas correct. Le calcul de B à partir de la valeur erronée de A et la valeur correcte de C donne, bien sûr, une mauvaise valeur pour B. Le signe de A est corrigé par feed-back et la valeur de B par la reprise du calcul. Les deux perturbations sont récupérées. Le passage par 0 semble avoir permis de donner du sens au coefficient C.

Exercice 7 :

P1 :	2	0	0	Parabole 2 x^2
R :	2	0	0	

Réponse correcte d'emblée. Après 3 réussites successives sur P1, Olivier retourne à la forme P3.

Exercice 8 :

P3 :	-2	-1	-2	Parabole -2 (x + 1) (x + 2)
T :	3	6	-24	
T :	-3	-15	-12	
T :	-3	-9	-6	
R :	-2	-2	-1	

Rien sur le brouillon n'explique les premières valeurs proposées. La forme inhabituelle du premier tracé (seule une partie de la courbe située d'un même côté de l'axe de symétrie de la parabole apparaît sur l'écran où les valeurs sur l'axe des abscisses sont situées entre -16 et 16) semble pousser Olivier à envisager des valeurs "de plus en plus petites". Après trois tracés, il semble qu'il ait "saisi" dans l'effet dynamique sur l'écran le rôle de R et S. Cette interprétation se trouve confirmée par les exercices qui suivent.

Exercice 9 :

P3 :	1	0	1	Parabole x (x - 1)
R :	1	0	1	

Exercice 10 :

P3 :	-2	-1	4	Parabole -2 (x + 1) (x - 4)
R :	-2	1	4	

R :	-2	-1	4

A signaler aussi la familiarité construite avec la taille de A qui lui permet dans les derniers exercices de procéder directement en mode réponse.

L'interprétation du travail d'Olivier a été partiellement facilitée par les traces figurant sur son brouillon. Ceci concerne seulement les exercices où C a été utilisée. Notre interprétation est la suivante :

Olivier commence par une exploration du logiciel. L'option C et ce que l'on peut faire avec (écriture d'équations) puis l'option T, un exercice de chaque type. Prisonnier de la forme usuelle, il confond P3 et P1. Echec. Après ces deux échecs, il rechange de forme et reste sur P1. Au début, on n'identifie pas de stratégie claire. Il mélange C, T et R mais refuse assez vite le coût de C. La rencontre d'une parabole passant par l'origine (exercice 5) semble être le déclencheur du sens de C. A partir de cette prise de sens, Olivier met en oeuvre une stratégie efficace dans le cas de P1 : lecture de C, estimation de A, calcul de B et contrôle par tracé avant réponse. Après plusieurs réussites sur P1, Olivier passe à la forme P3. D'emblée, il change de stratégie. Estimation de A, tracés et feed-back. C'est le fait de tracés inhabituels qui joue ici le rôle de facteur déclenchant pour la prise de sens de R et S, dès le premier exercice (exercice 8) : du tracé hors écran, en réduisant, en plusieurs étapes, les valeurs de A, R et S, Olivier voit apparaître, puis se rétrécir, la parabole proposée, phénomène lié particulièrement à R et S. Olivier est un élève qui apprend. Sa stratégie lecture/estimation le conduit là aussi à une réussite systématique, du fait de la familiarisation acquise avec les valeurs de A.

On trouve ici un cas de stratégie observable CTR évolutive adaptée au type de la parabole. Conformément à l'analyse a priori, cette stratégie met clairement en jeu des connaissances sur les coefficients.

Au pré-test Olivier n'avait manifesté de connaissances que sur le signe de A. Au post-test : il ne manifestera rien sur B, il manifestera de bonnes connaissances, sur tous les savoirs relatifs à C, sur presque tous les savoirs sur R et S et sur tous les savoirs relatifs à A excepté l'ordre. Ceci est étonnant car l'ordre semble être saisi en séance. Il semble donc que l'adaptation au logiciel ait provoqué ici la capacité d'estimer des ouvertures sans pour autant entraîner une perception de la relation d'ordre suffisamment consciente pour être transférable à d'autres environnements.

Les graphiques suivants montrent l'évolution des connaissances selon l'analyse décrite précédemment.

Cas de P1 :

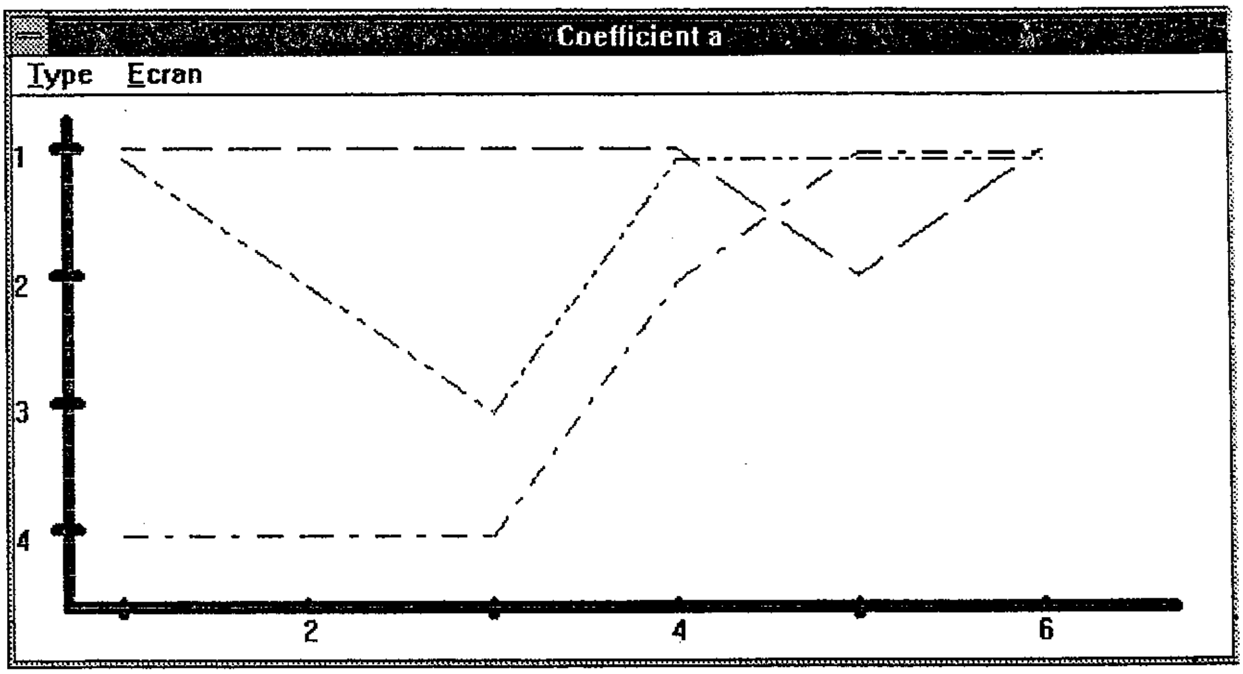


Figure 5-2-6 : l'évolution sur A

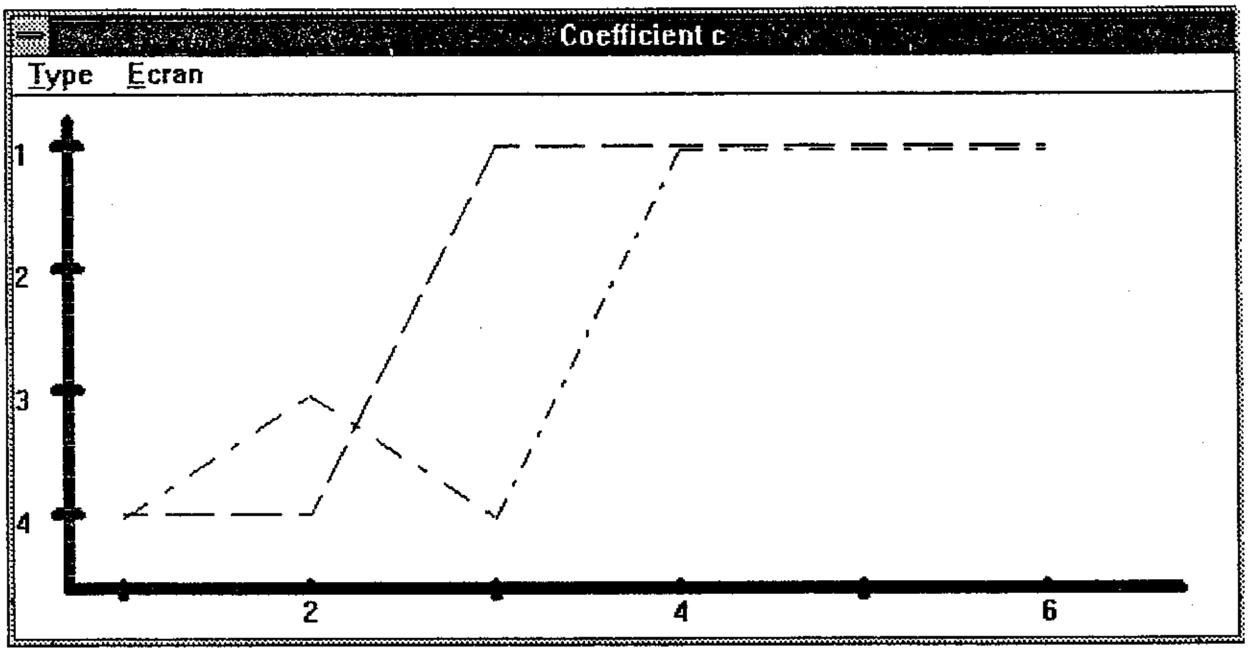


Figure 5-2-7 : l'évolution sur C

Cas de P3 :

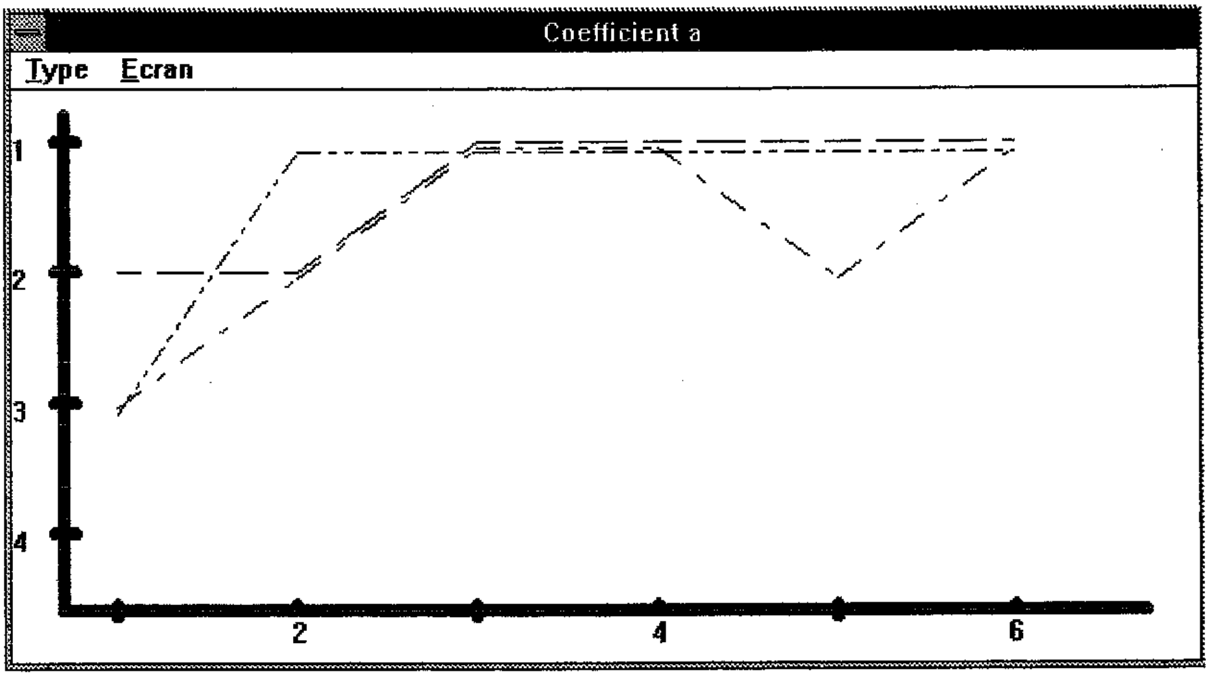


Figure 5-2-8 : l''évolution sur A

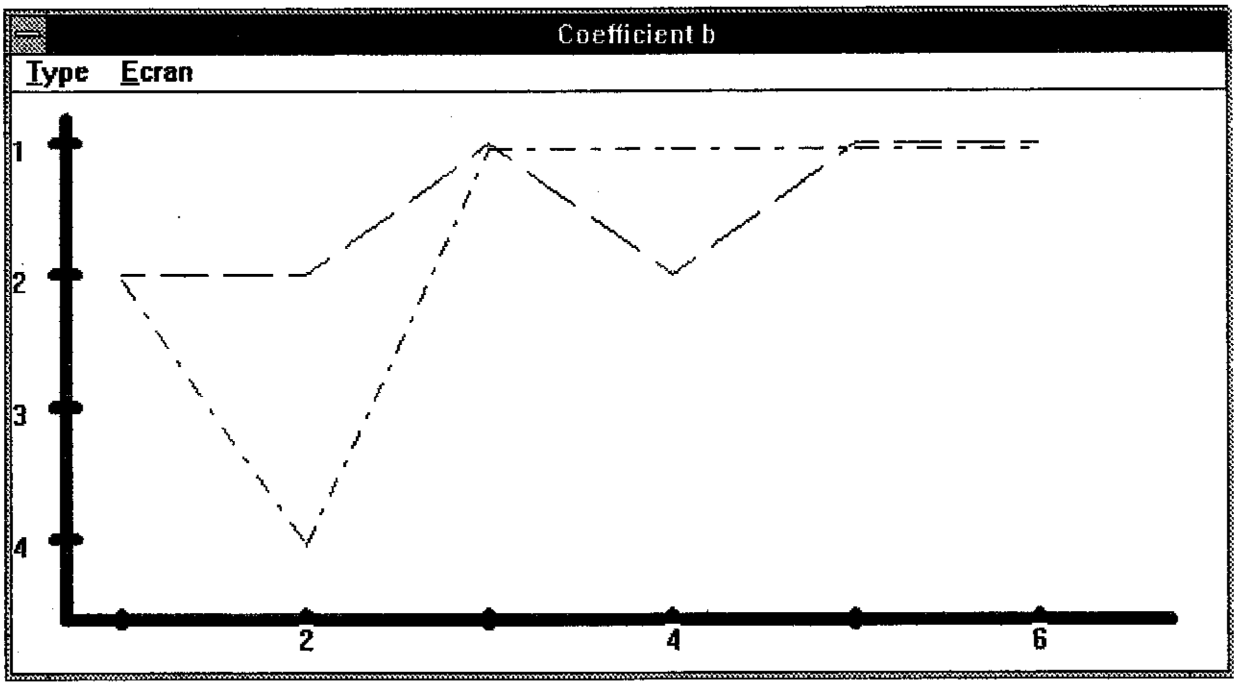


Figure 5-2-9 : l''évolution sur R

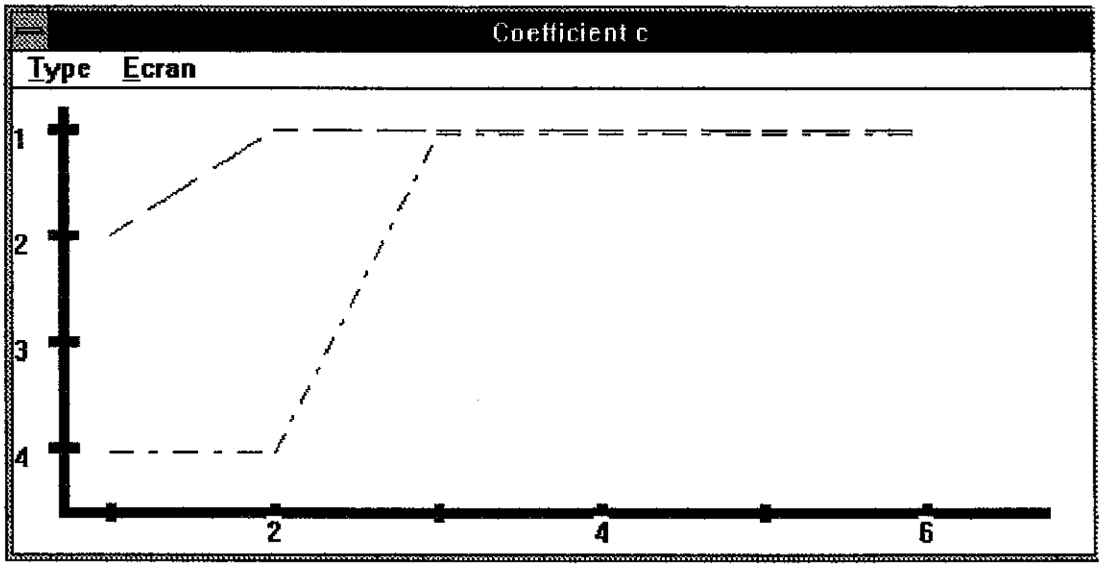


Figure 5-2-10 : l''évolution sur S

CHAPITRE V - PARTIE III

ANALYSES GLOBALES DE DONNEES RECUEILLIES

ANALYSES STATISTIQUES DES DONNEES RECUEILLIES

I) INTRODUCTION

L'analyse des résultats de l'expérimentation doit nous permettre d'apporter des éléments de réponses aux questions que nous étudions. Ces questions, qui ont été présentées dans le chapitre I, sont de deux ordres :

1) des questions sur le fonctionnement de l'élève et son évolution cognitive dans un environnement informatique comme celui exploité dans la recherche, ainsi que sur le pilotage possible de cette évolution par le choix de variables adaptées,

2) des questions sur les rapports à la tâche qui favorisent ou défavorisent l'apprentissage dans un environnement informatique comme celui-ci,

les questions d'ordre méthodologique restant ici en filigrane.

Pour étudier les questions posées, nous avons commencé par réaliser des fiches synthétisant les résultats pré-test/post-test et le parcours de chaque élève en séance. Une analyse sommaire de ces fiches nous a conduit à reformuler certaines des questions initiales et à en rajouter quelques autres. Nous avons ensuite soumis les données issues de ces fiches à diverses analyses statistiques : les méthodes d'analyse factorielle de correspondances, de classification implicative (selon R. Gras), et de classification hiérarchique (selon I.C. Lermann). L'utilisation de ces méthodes et les traitements informatiques nécessaires ont été effectuées avec l'aide de l'équipe de didactique de l'Institut Mathématique de Rennes 1, en particulier de S. Ag Almouloud et R. Gras.

II) LES FICHES ELEVE

La fiche élève que nous avons élaborée rassemble des renseignements sur l'élève, et des informations sur son travail dans chacune des étapes de l'expérimentation avant, pendant et après la séance informatique. Elle comprend quatre volets : le premier contient des informations sur l'élève qui ont été fournies par l'enseignant et décrivent ce que nous appellerons son "profil", le second contient les résultats au pré-test, le troisième contient les informations recueillies sur la séance informatique et le dernier contient les résultats au post-test.

Le volet "profil de l'élève" concerne son niveau mathématique général, son attitude par rapport aux mathématiques et à l'informatique. Le volet "séance informatique" est la fiche séance de l'élève déjà décrite dans le chapitre précédent. En ce qui concerne les tests, que nous avons analysés dans le chapitre précédent, nous avons procédé de la manière suivante : nous avons associé deux niveaux de maîtrise à chacune des connaissances atomiques mises en jeu. Une seule connaissance atomique étant en jeu pour chaque question, le code 1 a été attribué lorsque la réponse à la question correspondante était correcte, le code 0 dans le cas contraire. Nous avons codé par N, d'autre part, les non-réponses.

A partir de cette fiche-résumé et du fichier élève qui lui est associé, nous avons pu retracer le fonctionnement de certains élèves dans l'environnement informatique, en le liant à leur profil et résultats aux tests. Nous avons donné dans le chapitre précédent deux exemples de ces fonctionnements qui montrent des comportements complètement différents.

III) COMPARAISON DES RESULTATS DES TESTS

Chacun des questionnaires du pré-test et du post-test présentés dans le chapitre précédent est formé de 2 parties : l'une constituée de questions qui portent sur P1 ou P2, selon le groupe, et l'autre de questions sur P3. Chaque partie a été notée sur 100. Toutes les questions d'une même partie ont été affectées du même nombre de points. La moyenne des notes des deux parties est la note de l'élève au test. Des statistiques élémentaires sur les notes ainsi obtenues, font apparaître quelques grands traits de cette expérimentation. Les tableaux qui vont suivre regroupent l'essentiel de ces statistiques.

PARTIE	MOYENNE
Population	13
Faibles	6
Moyens	19
Première	9
Terminale	16

Tableau 5-3-1 : moyennes au pré-test, globales, par classe et par niveau.

La comparaison de ces tableaux nous permet de formuler les remarques suivantes :

1) Les résultats au pré-test ont été :

- Très faibles en général, et ceci est à lier au pourcentage faible, rencontré dans le chapitre précédent, des élèves qui ont manifesté dans leurs pré-tests les connaissances atomiques identifiées.
- Peu influencés par le profil de l'élève.
- Non influencés de façon significative par la classe.

Ceci, nous semble-t-il, confirme des résultats des recherches citées dans le chapitre II qui tendent à montrer que, dans l'enseignement traditionnel, les relations coefficients d'équation - propriétés graphiques sont mal connues des élèves du second cycle. Ceci confirme aussi que classe et niveau d'élèves ne sont pas des facteurs déterminants dans la discrimination des élèves vis-à-vis de ces connaissances.

PARTIE	MOYENNE
Population	53
Faibles	55
Moyens	52
Première	54
Terminale	52
P1	38
P2	56
P3	60

Tableau 5-3-2 : moyennes de progrès pré-test/post-test, globales, par classe, par niveau et par forme.

II) Le progrès pré-test /post-test a été :

- Globalement important. Ceci confirme le résultat de l'analyse précédente, à savoir, l'amélioration globale des connaissances atomiques qui s'est produite entre pré-test et post-test.
- Indépendant de la classe.
- Indépendant du profil de l'élève.
- Maximal avec P3.

Cette non influence des facteurs classe et profil est ici intéressante. Nous la considérons comme signe positif de l'effet de la séance. Elle a permis aux faibles en terminale et aux élèves de première d'améliorer leurs connaissances, manifestées à ce moment-là, de la même façon que les élèves moyens de terminale.

Ces analyses élémentaires grossières pré-test/post-test associées à une première analyse sommaire des enregistrements de la séance informatique nous ont poussé à préciser les questions globales nouvelles posées de la façon suivante :

1) Pour certains élèves, nous avons remarqué que le rapport du nombre d'exercices réussis pendant la séance au nombre d'exercices traités pendant la séance est plus petit que le rapport note au post-test/100. De plus, au vu de leurs résultats en fin de séance, les résultats au post-test semblent meilleurs que le déroulement de la séance informatique ne le laissait

présager. Dans quelle mesure exacte sont-ils meilleurs ? Si c'est le cas, qu'est ce qui peut expliquer ce décalage ?

2) Est-ce-que le nombre d'exercices traités, de paraboles vues tracées, pendant la séance, est un facteur jouant dans l'apprentissage, ou jouant sous certaines conditions ?

3) Les élèves de Première, pendant la séance, nous semblaient être plutôt dans une ambiance de jeu. Les élèves de Terminale étaient plutôt dans une ambiance d'apprentissage. Or, les résultats globaux ne mettent pas en relief des différences essentielles entre les deux classes. Jusqu'à quel point ceci est-il vrai ? Quelles hypothèses peut-on faire sur la source de ces phénomènes ?

Ajoutons à ces questions, deux autres anciennes et centrales, déjà exprimées précédemment :

4) Les profils stratégiques identifiés d'élèves sont-ils en rapport avec les résultats obtenus ? Y-a-t-il des profils plus adaptés à la réussite ? Pourquoi ?

5) L'adaptation au jeu induit-elle un apprentissage ? Si oui, comment et pourquoi ?

Les différentes méthodes d'analyse de données, mentionnées plus haut, ont été utilisées pour contribuer à la recherche des réponses à ces questions.

IV) ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

Cette analyse, conduite à l'aide du logiciel CHADOC de l'I.U.T de NICE, nous permet d'identifier les facteurs principaux de discrimination des variables du tableau de données traité et de les ordonner selon leur importance décroissante. Ce tableau (qui figure dans les deux pages suivantes) contient 17 variables à 66 modalités réparties sur les rubriques : Profil général de l'élève, Progrès pré-test / post-test, Comportement de l'élève et tactique observée.
En ce qui concerne les tactiques, une première identification à partir des fiche-résumés a montré que près de 25% des traveaux sont associés à la tactique R et près de 50 % aux tactiques TR, CR et CTR. Ces trois dernières tactiques traduisant une transition vers R, nous les avons regroupées en une seule. L'analyse fine des travaux de Michel et Olivier suggérant que ce passage vers R pouvant traduire un refuge dans le jeu ou une capacité de réponse directe, nous avons scindé cette tactique de transisition en deux catégories : catégorie P lorsque le passage à R est suivi de résultats positifs en séance, et catégorie N lorsque les résultats sont négatifs. D'autre part nous avons regroupé dans la tactique D les tactiques minoritaires C et CT. Nous avons donc retenu les tactiques : R, T, P, N et D.

Notons que, dans le choix des frontières des modalités des variables, nous avons pris en compte à la fois les effectifs correspondants et les valeurs de frontières séparant le mieux ces modalités.

Voici la liste des variables accompagnées de leurs modalités.

<u>CLAS</u> : classe de l'élève.
PREM : classe de première.

TERM : classe de terminale.

NIVE : niveau de l'élève.
FAIB : faible.
MOYE : moyen.

PARA : type de paraboles rencontrées par l'élève dans toutes les étapes.
PAR1: P1 et P3.
PAR2 : P2 et P3.

TSES : tactique observée lors de la session informatique.
TACT : tactique T.
TACR : tactique R.
TACD : tactique CT ou tactique C.
TACP : tactique de transition vers R accompagnée d'une réussite[1] en fin de séance.
TACN : tactique de transition vers R non accompagnée d'une réussite en fin de séance.

TV12 : test avant sur P1ou sur P2.
TV11 : note dans [0 ; 13[.
TV12 : note dans [13 ; 26[.
TV13 : note dans [26 ; 40[.
TV14 : note dans [40 ; 80].

TP12 : test après sur P1ou sur P2.
TP11 : note dans [13 ; 30[.
TP12 : note dans [30 ; 53[.
TP13 : note dans [53 ; 80[.
TP14 : note dans [80 ; 100].

TV30 : test avant sur P3.
TV31 : note dans [0 ; 7[.
TV32 : note dans [7 ; 20[.
TV33 : note dans [20 ; 76].

TP30 : test après sur P3.
TP31 : note dans [13 ; 40[.
TP32 : note dans [40 ; 70[.
TP33 : note dans [70 ; 100].

PRGL : progrès global.
PRG1 : progès dans [0 ; 20[.
PRG2 : progès dans [20 ; 40[.
PRG3 : progès dans [40 ; 60[.
PRG4 : progès dans [60 ; 100].

NP12 : nombre de paraboles P1 ou P2 rencontrées en séance.
NP11 : nombre dans [0 ; 10[.
NP12 : nombre dans [10 ; 20[.
NP13 : nombre dans [20 ; 30[.
NP14 : nombre dans [30 ; 40[.

[1] Réussitre au moins différentielle.

NP15 : nombre dans [40 ; 50].

NP30 : nombre de paraboles P3 rencontrées en séance.
NP31 : nombre dans [0 ; 10[.
NP32 : nombre dans [10 ; 20[.
NP33 : nombre dans [20 ; 30[.
NP34 : nombre dans [30 ; 40[.
NP35 : nombre dans [40 ; 50].

ET12 : nombre d'exercices P1 ou P2 traités en séance.
ET11 : nombre dans [1 ; 4[.
ET12 : nombre dans [4 ; 7[.
ET13 : nombre dans [7 ; 10[.
ET14 : nombre dans [10 ; 12].

ET30 : nombre d'exercices P3 traités en séance.
ET31 : nombre dans [1 ; 4[.
ET32 : nombre dans [4 ; 7[.
ET33 : nombre dans [7 ; 10[.
ET34 : nombre dans [10 ; 12].

ETS0 : nombre d'exercices traités en séance.
ETS1 : nombre dans [1 ; 5[.
ETS2 : nombre dans [5 ; 9[.
ETS3 : nombre dans [9 ; 13[.
ETS4 : nombre dans [13 ; 17[.
ETS5: nombre dans [17 ; 20].

ER1T : rapport du nombre d'exercices P1 ou P2 réussis au nombre d'exercices traités en séance.
ER11 : nombre dans [0 ; 0.2[.
ER12 : nombre dans [0.2 ; 0.4[.
ER13 : nombre dans [0.4 ; 0.6[.
ER14 : nombre dans [0.6 ; 0.8[.
ER15 : nombre dans [0.8 ; 1].

ER3T : rapport du nombre d'exercices P3 réussis au nombre d'exercices traités en séance.
ER31 : nombre dans [0 ; 0.2[.
ER32 : nombre dans [0.2 ; 0.4[.
ER33 : nombre dans [0.4 ; 0.6[.
ER34 : nombre dans [0.6 ; 0.8[.
ER35 : nombre dans [0.8 ; 1].

ERET : rapport du nombre d'exercices réussis au nombre d'exercices traités en séance.
ERT1 : nombre dans [0 ; 0.2[.
ERT2 : nombre dans [0.2 ; 0.4[.
ERT3 : nombre dans [0.4 ; 0.6[.
ERT4 : nombre dans [0.6 ; 0.8[.
ERT5 : nombre dans [0.8 ; 1].

Les 4 premiers axes du nuage obtenu qui sont les lignes de force séparant les variables restituent 57,62 % de l'inertie c'est-à-dire de l'information fournie par les données :

axe 1 : 22,59 % de l'inertie totale
axe 2 : 14,95 % " "
axe 3 : 11,75 % " "
axe 4 : 8,33 % " " .

Il nous a paru que l'inertie globale qui approche les 60 % est suffisamment grande et que l'inertie sur l'axe 5, qui est de 6.12, est suffisamment faible pour limiter notre analyse à ces 4 axes.

AXE 1 : Le facteur qu'il semble naturel d'associer à cet axe est "la performance à la séance et au post-test". En effet les modalités qui contribuent principalement à cet axe et qui sont données avec leur contributions et leurs poids dans le tableau suivant sont des modalités de variables associées à la réussite en séance, au progrès pré-test/post-test et à la réussite au post-test :

MODALITE	CONTRIBUTION	POIDS
ERT1	11	4
TP11	9	6
TP31	8	4
ERT5	7	3
ER31	5	9
ER15	4	7
PRG1	3	7
PRG4	3	8

Tableau 5-3-3 : valeurs des contributions des modalités à l'axe 1.

Cet axe peut être schématisé par :

ERT1 TP31 ER11 ER31 **R** **P** ER15 ERT5
0 PRG4

TP11 PRG1 **T** **N** **D** TV33 TV13
TV14

L'axe oppose de droite à gauche les très bonnes réussites pendant la session ERT5 et ER15 aux faibles réussites pendant la séance ERT1 et ER31 et aux faibles post-test TP11 et TP31. De plus, accompagnent la très bonne réussite en séance, les modalités des bons pré-tests TV13, TV14 et TV33, et accompagnent la faible réussite en séance des faibles performances au post-test. Ceci semble permettre d'inférer qu'un bon niveau de départ conduit à une très bonne séance et qu'une mauvaise séance conduit à mauvais post-test. En revanche, il n'y a pas de liaison évidente : bonne séance - bon post-test, ce qui est conforme à la remarque à la base de la question 1 ci-dessus.

Notons que la tactique T est nettement proche des faibles réussites en séance, les tactiques P (tactique de transition positive vers R) et D (tactiques C et CT) sont les plus proches de la réussite alors que les tactiques R et N sont plus nuancées.

AXE 2 : Le facteur qui semble être associé à ce facteur est "l'activité pendant la séance avec P1 et P2". En effet les modalités qui ont déterminé cet axe sont données par le tableau suivant :

MODALITE	CONTRIBUTION	POIDS
NP15	11	3
ET14	10	4
ETS5	9	4
NP11	6	8
NP12	5	12
NP14	4	3
ET12	4	12

Tableau 5-3-4 : valeurs des contributions des modalités à l'axe 2.

Le schéma de cet axe est :

NP11 ET12 NP12 **N**   **P** ET14 NP15

0

PRG3 **R** **D**   **T** NP14

PRG2   PRG4

ETS5

Cet axe sépare les modalités de variables associées à la rapidité et à l'activité : ETS5, NP15, NP14 et ET14, des modalités associées à la lenteur et à la faible activité : NP11, NP12 et ET12, lors du travail avec P1 ou P2 pendant la séance.

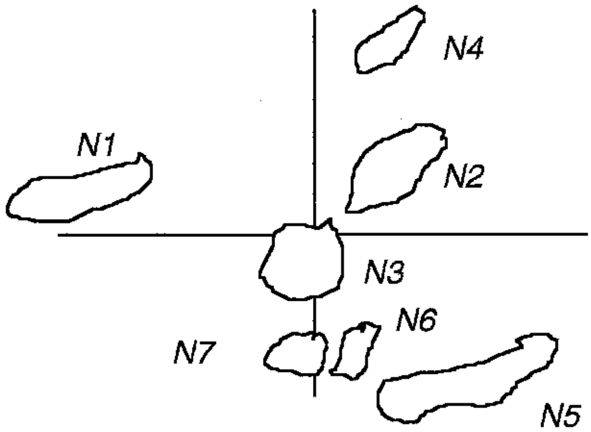
Se trouvent liés à la grande activité avec P1 et P2 :

- La tactique P qui regroupe des tactiques de transition vers le jeu (CR, CTR et TR) qui se terminent par une réussite relative. D'après notre analyse précédente, CTR exploite les trois options offertes par le logiciel et de ce fait il n'est pas étonnant qu'elle permette à l'élève de contourner une situation de blocage et qu'elle favorise une séance active. Ceci semble expliquer partiellement cette position de P.
- Un progrès global très grand PRG4 qu'il faut regarder avec précaution du fait qu'il apparaît pour un petit nombre d'élèves (4 élèves).

A la faible activité avec P1 et P2 se trouve associé un faible progrès global PRG2 ou un progrès global moyen PRG3.

Mais ne nous trompons pas. L'association qui se dessine vaguement entre faible progrès et faible activité d'une part, grande activité et grand progrès d'autre part, ne doit pas être interprétée comme indicatrice de liaison automatique activité-performance. L'axe 4 nous aidera à préciser ce point.

NUAGE DANS LE PLAN 1 - 2 : Sur ce nuage nous observons les sous-nuages homogènes N1, N2, N3, N4, N5, N6 et N7.



N1 : celui des modalités de réussites faibles (ERT1, TP31, TP11, ER11, ER31) et de progrès faible PRG1.

N2 : celui des modalités de grande réussite (ER13, TP14, TV13, ER34) et de grand progrès PRG4.

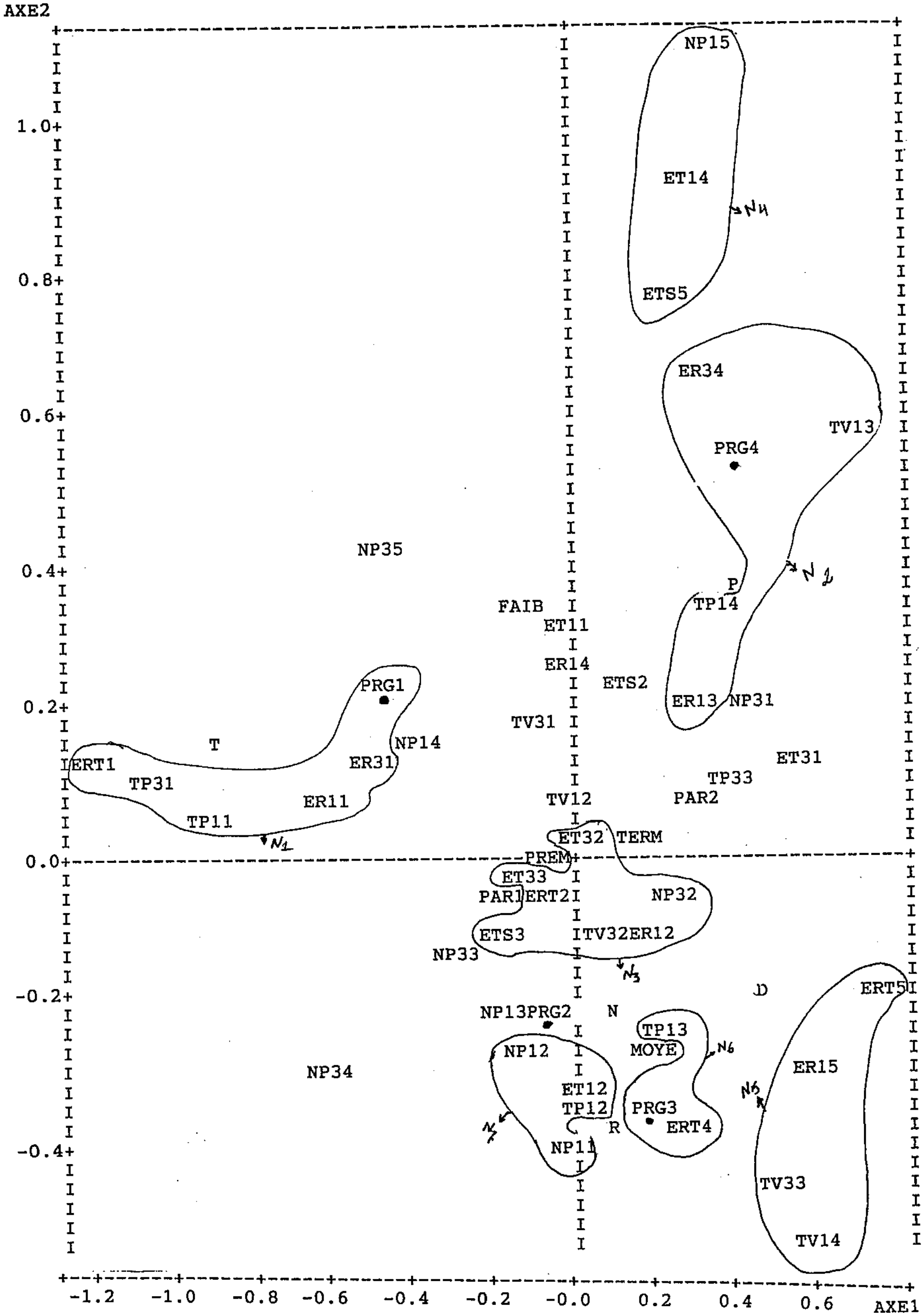
N3 : celui des modalités de réussite plutôt faible (ER12, TV32, ERT2, TV12) et d'activité plutôt moyenne (ETS3, ET33, ET32, NP32).

N4 : celui des modalités d'activité excessive (NP15, ET14, ETS5).

N5 : celui des modalités de très grande réussite (TV14, TV33, ER15, ERT5).

N6 : celui des modalités de bonne réussite (ERT4, TP13) et de progrès moyen PRG3.

N7 : celui de modalités de faible activité sur P1 et P3 (NP11, TP12, ET12, NP12).


AXE2
AXE1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-1.2
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
-0.0
0.2
0.4
0.6
NP15
ET14
ETS5
ER34
TV13
PRG4
NP35
P
TP14
FAIB
ET11
ER14
ETS2
ER13
NP31
PRG1
TV31
T
NP14
ERT1
ER31
ET31
TP31
TP33
ER11
PAR2
TV12
TP11
ET32
TERM
PREM
ET33
PAR1
ERT2
NP32
ETS3
TV32
ER12
NP33
D
ERT5
NP13
PRG2
N
TP13
MOYE
NP12
NP34
ER15
ET12
TP12
PRG3
R
ERT4
NP11
TV33
TV14
N1
N2
N3
N4
N5
N6

Nous remarquons, sur la figure ci-dessus que les positions extrêmes des sous-nuages N1, N4 et N5 mettent en relief ce qu'on peut appeler le caractère plutôt marginal et exceptionnel des phénomènes sous-tendus par ces groupes de modalités exprimant respectivement le très faible apport de la séance, la très forte activité, et le très fort progrès. En revanche, en examinant le nuage donné dans la page suivante on peut remarquer que :

1) Dans N3 et à cause de sa position centrale, la présence des modalités TERM, PREM, PAR1 et PAR2 montre que, indépendamment de la classe et du type de paraboles, résultats et activité sont plutôt moyens, résultat conforme avec celui indiquant l'indépendance des résultats et des variables Niveau et Classe déjà rencontrée lors de l'analyse brute des données.

2) La proximité de la tactique T de N1, de P de N2, de N à la fois de N3, N7 et N6, de D de N5 et N6 et de R de N6 et N7 est significative et problématique. Le fait que T, à cause de sa contribution forte (7) à l'axe 1 et de sa position à l'extrémité de cet axe, conduise nettement à un faible progrès, que P, pour les mêmes raisons de forte contribution (4) à l'axe 2 et de position nettement engagée vers l'extrémité de cet axe, s'accompagne d'une grande activité et de bon progrès et que R, à cause de sa position plutôt centrale, soit nuancée du point de vue de la réussite, n'est pas, selon notre analyse a priori, imprévisible. Le fait que les tactiques N et R soient des tactiques de faible activité avec P1 et P2 peut être expliqué par la difficulté relative à P1 en particulier et la non réussite c'est-à-dire par le temps perdu pour décider quoi faire. En revanche le fait que D soit une tactique de réussite est, d'après notre analyse a priori, difficilement compréhensible. L'effectif faible de D affaiblit la significativité de ce résultat.

3) Les positions des modalités FAIB et MOYE semblent suggérer que les élèves faibles manifestent plutôt une grande activité et utilisent plutôt les tactiques P avec lesquelles ils arrivent à réussir en fin de séance (CTR en particulier) alors que les élèves moyens semblent utiliser plutôt R et D qui d'après notre analyse a priori exigent pour mener à la réussite un certain seuil au niveau des connaissances et compétences spécifiques au départ.
Au niveau de la réussite, le niveau de l'élève n'est pas significatif, ce qui confirme, encore une fois, un résultat déjà trouvé : le progrès est, en première approximation, indépendant du niveau de l'élève.

4) Les points PRG1, PRG2, PRG3 et PRG4 s'inscrivent sensiblement sur une parabole selon un mode bien connu pour la réussite en analyse factorielle des correspondances.

AXE 3 : A propos du sens de cet axe, on peut dire que c'est l'axe de "densité de l'activité". En effet les modalités qui le déterminent essentiellement sont :

MODALITE	CONTRIBUTION	POIDS
ET13	7	7
ET11	6	9
ET33	5	13
ETS2	4	6
NP35	4	3
ET31	3	4
NP31	3	7
NP11	3	8
NP13	3	7
ETS4	3	10

Tableau 5-3-5 : valeurs des contributions des modalités à l'axe 3.

Le schéma de cet axe est :

ET13	ET33	ETS2			**P**	**T**	ET11	NP35
	PRG2			O	**D**		NP31	ET31
ETS2	NP13	ETS4	**R**		**N**			NP11

Cet axe oppose les modalités d'activité extrême : ET11, NP35, ET31, NP31 et NP11 aux modalités d'activité plutôt moyenne : ET13, ET33, ETS2, NP13 et ETS4. Comme nous le savons, ce phénomène est fréquent en analyse des correspondances.

Du côté des modalités d'activité moyenne, on trouve :

- La modalité de progrès légèrement moyen PRG2.
- La tactique R.

Les modalités d'activité extrême sont, elles, à proximité de la tactique T alors que les tactiques P, N et D occupent des positions plutôt proches des modalités d'activité moyenne.

AXE 4 : Le sens que l'on peut donner à ce facteur nous semble le suivant : "les rapports activité-performance sur P3 surtout". En effet les modalités essentielles dans la définition de cet axe sont :

MODALITE	CONTRIBUTION	POIDS
ER33	7	7
ERT4	6	7
NP14	5	3
ER32	4	11
ETS3	4	10
NP34	4	3
NP32	3	14
ER13	3	4
ET34	3	12

Tableau 5-3-6 : valeurs des contributions des modalités à l'axe 4.

Le schéma de cet axe est :

NP14 NP34 **R** **T** **P** ERT4 ER13

O

ET34 NP32 ETS3 **N** ER32 ER33

D'un côté donc, nous trouvons des modalités de bons résultats en séance ER33, ERT4 et ER13 et de l'autre les modalités de grande activité NP14, NP34 et ET34.
Les tactiques P se trouvent du côté des bons résultats tandis que les autres sont plus réparties.

Cet axe semble confirmer que grande activité s'oppose parfois à grande performance donc que, a fortiori, il n'y a pas une liaison automatique entre activité et performance. De plus, les deux derniers axes laissent supposer un statut particulier de la forme P3 par rapport aux formes P1 et P2 qui serait à interpréter.

V) ANALYSE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

Rappelons que la classification hiérarchique des similarités selon "l'algorithme de la vraisemblance du lien " (A.V.L.), qui est due à I. C. Lermann [Lermann, 1981], est une méthode d'analyse qui permet la classification d'attributs selon le principe suivant :
Si a et b sont 2 attributs et A et B sont les ensembles d'individus possédant respectivement ces attributs dans une population E donnée, alors la similarité entre a et b est mesurable par le cardinal de l'ensemble $A \cap B$. Mais cette similarité risquant d'être biaisée par les cardinaux de A et B, on intégrera cette information si l'on compare statistiquement le cardinal de $A \cap B$ à celui que l'on obtiendrait en choisissant au hasard des parties de la population de mêmes cardinaux que A et B.
Un algorithme ascendant, fonctionnant sur le même principe, permet d'agréger par similarité décroissante attributs en classes et classes en surclasses jusqu'à la classification complète.
Les ressemblances ou différences entre les attributs ou les classes d'attributs sont traduites graphiquement par un arbre.

Les données de l'expérimentation et le codage utilisé dans l'analyse factorielle nous ont conduit à considérer 66 modalités. Vu les contraintes de l'analyse effectuée à l'aide du logiciel CHIC (IRMAR), nous avons été amené à réduire ce nombre à 52. Nous n'avons pas inclus les modalités de classe et de niveau, les résultats trouvés à leur propos nous semblant suffisamment probants. Nous avons aussi modifié certaines modalités d'autres variables et nous en avons introduit d'autres qui semblent nécessaires à ce niveau d'analyse voulu plus précis, comme les variables de progrès sur chacune des formes P1 et P2. La liste des codes des différentes variables qui ont fait l'objet de l'analyse hiérarchique de similarité (avec leurs effectifs et leurs numéros) est finalement la suivante (les mêmes variables seront utilisées pour l'analyse implicative) :

NUMERO	CODE	EFFECTIF	VARIABLE
1	PAR1	18	Paraboles de type 1
2	PAR2	15	" " " 2
3	T	5	Tactique T
4	R	7	" R
5	P	11	" P

6	N	7	" N
7	D	3	" D
8	TV11	18	Test aVant surP1 ou P2 : faible
9	TV12	8	" " " moyen
10	TV13	7	" " " bon
11	TP11	13	Test aPrès sur P1 ou P2 : faible
12	TP12	10	" " " moyen
13	TP13	8	" " " bon
14	TV31	18	Test aVant sur P3 : faible
15	TV32	10	" " " moyen
16	TV33	5	" " " bon
17	TP31	7	Test aPrès sur P3 : faible
18	TP32	14	" " " moyen
19	TP33	12	" " " bon
20	PRG1	12	Progrès global : faible
21	PRG2	13	" " moyen
22	PRG3	8	" " bon
23	NP11	8	Nombre de Paraboles P1 ou P2 : faible
24	NP12	12	" " " " moyen
25	NP13	13	" " " " grand

26	NP31	7	" " " sur P3 : faible
27	NP32	14	" " " " moyen
28	NP33	12	" " " " grand
29	ET11	9	Exercices sur P1 ou P2 : faible
30	ET12	13	" " " moyen
31	ET13	11	" " " grand
32	ETS1	9	" traités en Séance : faible
33	ETS2	10	" " " moyen
34	ETS3	14	" " " grand
35	ERT1	10	Exercices P1 ou P2 réussis : faible
36	ERT2	13	" " " moyen
37	ERT3	10	" " " grand
38	ER11	9	Exercices P1 ou P2 Réussis : faible
39	ER12	12	" " " moyen
40	ER13	12	" " " grand
41	ET31	4	Exercices P3 Traités : faible
42	ET32	13	" " " moyen
43	ET33	16	" " " grand
44	ER31	9	Exercices P3 Réussis : faible

45	ER32	11	" " " moyen
46	ER33	13	" " " grand
47	PR11	13	Progrès sur P1 ou P2 : faible
48	PR12	15	" " " moyen
49	PR13	5	" " " grand
50	PR31	8	Progrès sur P3 : faible
51	PR32	8	" " moyen
52	PR33	17	" " grand.

Tableaux 5-3-7 : modalités retenues dans l'analyse hiérarchique et implicative, codes et effectifs.

Cette analyse agrège trois grandes classes de variables présentant des similarités selon l'A.V.L. comme le montre la figure ci-dessous. Nous les désignerons par A, B et C. Elles sont déterminées par le fonctionnement des élèves, leurs comportements et leurs résultats dans les trois phases de l'expérimentation.

Résultats faibles surtout sur P1. Nombre de paraboles P3 rencontrées moyen.	Nombre de paraboles P3 rencontrées grand. Stratégie T.	Activité globale moyenne.	Grande activité. Stratégie R accompagnée d'un résultat à l'entrée moyen sur P1 et P3 .	Pré-test moyen, post-test moyen et une séance moyenne. Stratégie N.	Bons résultats en séance et au post-test. Progrès moyen.	Faible activité. Stratégie D accompagnée d'un bon post-test sur P1 et P3.	Séance moyenne. Grands progrès. Stratégie P.
A11	A12	A2	B1	B2	C1	C2	C3
A			B		C		

Figure 5-3-1.

La classe A rassemble des variables correspondant à des résultats d'ensemble plutôt faibles ou correspondant à une activité moyenne. Elle contient deux sous-classes:

A1 : classe de variables à résultats faibles comportant elle aussi deux sous-classes:

A11 : où, de plus, les paraboles sont des deux types P1 et P3, le nombre de paraboles rencontrées de type P3 est moyen et où précisément ce sont les résultats sur P1 qui sont faibles.

A12 : où, de plus, le nombre de paraboles rencontrées de type P3 est grand et la tactique utilisée est T.

A2 : classe de variables où l'activité globale est moyenne.

La classe B rassemble les variables correspondant à des résultats d'ensemble plutôt moyens et à une grande activité. Elle contient deux sous-classes :

B1 : classe de variables marquant une grande activité et où la tactique de séance R est accompagnée d'un résultat à l'entrée moyen sur P1 et P3 .

B2 : classe de variables indiquant, un pré-test moyen, un post-test moyen, une séance moyenne et l'utilisation de la tactique N.

La classe C rassemble les variables correspondant à des résultats d'ensemble plutôt bons et à une faible activité. Elle contient trois sous-classes :

C1 : classe de variables indiquant des bons résultats en séance et au post-test et un progrès moyen ; il s'agit des paraboles P2 et P3 et aucune tactique spécifique n'est utilisée.

C2 : classe de variables indiquant une faible activité, la tactique utilisée étant D, accompagnée d'un bon post-test sur P1 et P3.

C3 : classe de variables indiquant une séance moyenne et de grands progrès, la tactique utilisée étant P.

Nous nous contentons, pour le moment, de remarquer que : la tactique T est "proche" des variables de résultats plutôt faibles, la tactique R lorsqu'elle est accompagnée d'un niveau d'entrée moyen sur P1 ou P2 est "proche" des variables de grande activité, la tactique D lorsqu'elle est accompagnée d'un bon pré-test sur P1 ou P2 est "proche" des variables de faible activité ; la tactique N lorsqu'elle est accompagnée d'un pré-test moyen sur P3 est "proche" de variables de résultats plutôt moyens ; la tactique P est "proche" des variables de résultats bons. Nous reviendrons sur ces résultats d'une façon plus détaillée lors de la synthèse des résultats en fin de ce chapitre.

Voici l'arbre de la classification :

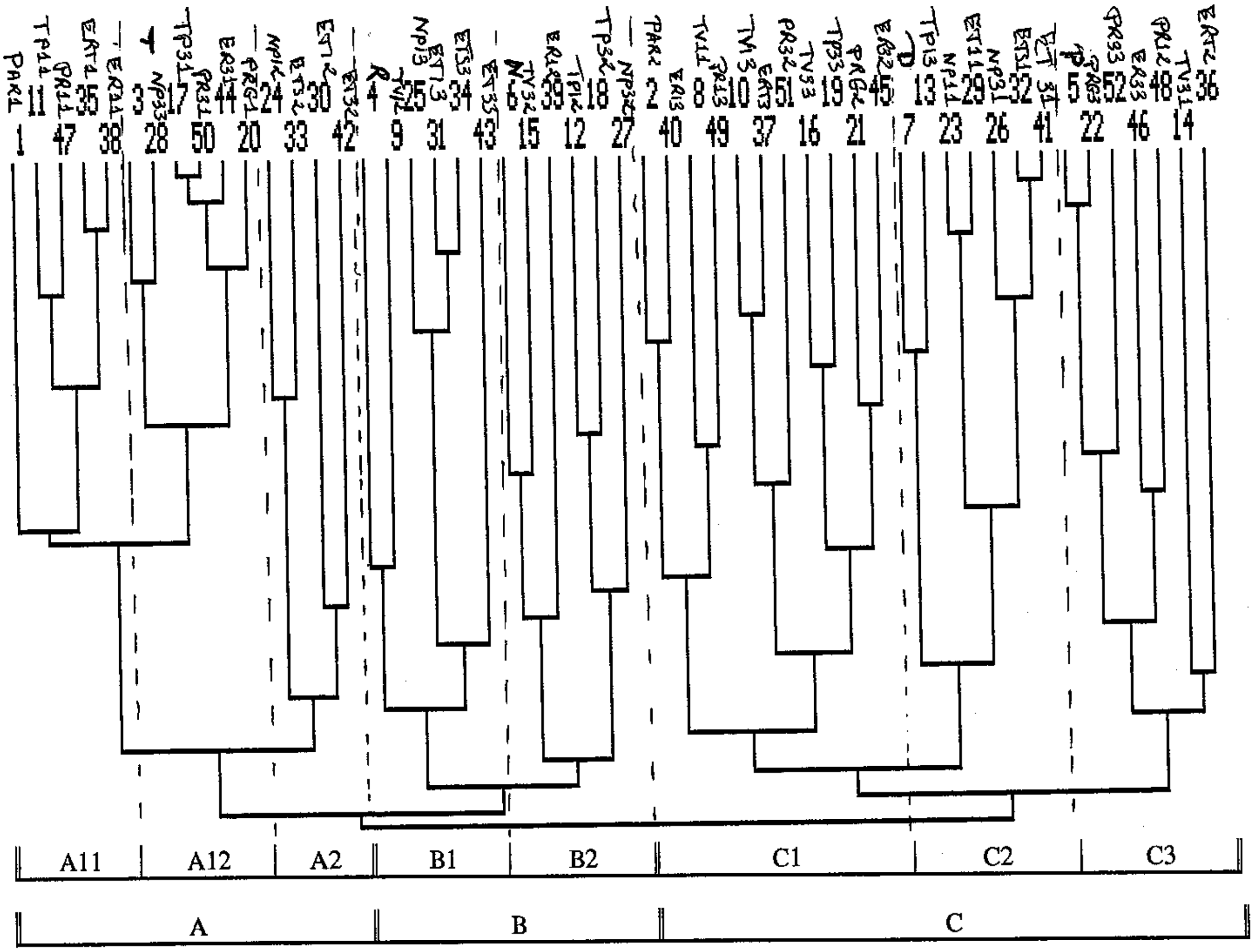

1 47 38 28 50 20 33 42 9 31 43 15 12 27 40 49 37 16 21 7 23 26 41 22 46 14
11 35 3 17 44 24 30 4 25 34 6 39 18 2 8 10 51 19 45 13 29 32 5 52 48 36
A11
A12
A2
B1
B2
C1
C2
C3
A
B
C

Figure 5-3-2

VI) ANALYSE IMPLICATIVE

Rappelons que, cette méthode, initiée par R. Gras [Gras, 1979], nous permet au moyen de l'analyse statistique implicative de dégager des structures implicatives dans le sens suivant : "tel attribut a s'accompagne de façon conséquente ou non de l'attribut b". Cette expression s'apparente à l'implication a⇒b ou à l'inclusion de l'ensemble d'individus qui ont "a" dans l'ensemble de ceux qui ont "b". En effet, l'implication stricte n'est que rarement réalisée. Un indice de quasi-implication permet de la rendre acceptable.
La hiérarchie implicative de classes permet une analyse de relations implicatives entre des classes de variables, elles-mêmes constituées en fonction de la cohésion implicative des variables correspondantes [Larher, 1991].
Le résultat de l'analyse est l'ensemble des graphes montrant des quasi-implications entre variables. Ces quasi-implications n'ayant pas la même valeur d'intensité q, nous nous sommes limité au seuil de 0.75. La flèche tracée d'un trait continu entre deux variables désigne une quasi-implication d'intensité $q \geq 0,95$, une flèche de petits traits indique que $0,85 \leq q \leq 0,95$ et une flèche tracée en pointillé désigne une quasi-implication dont $0,75 \leq q \leq 0,85$.

L'ensemble des graphes des quasi-implications entre les différentes variables est composé de 4 groupes :

G1 : groupe des sous-graphes où l'on trouve essentiellement des implications entre variables de pré-test et post-test.

G2 : groupe des sous-graphes où l'on trouve essentiellement des implications entre variables sur l'activité pendant la séance.

G3 : groupe des sous-graphes où l'on trouve essentiellement des implications entre variables de réussite en séance et de progrès pré-test / post-test.

G4 : groupe des sous-graphes où l'on trouve essentiellement des implications entre variables concernant les tactiques identifiées.

Chacun de ces groupes va nous permettre de donner les aspects les plus significatifs relatifs à la catégorie de variables qui y sont essentiellement mises en jeu.

a) <u>PRE-TEST ET POST-TEST</u> :

Dans ce graphe, qui se trouve à la page suivante, nous nous intéressons aux implications les plus significatives suivantes :

(1) : Un pré-test sur P1 ou P2 faible conduit, à plus forte raison, à un pré-test faible sur P3.

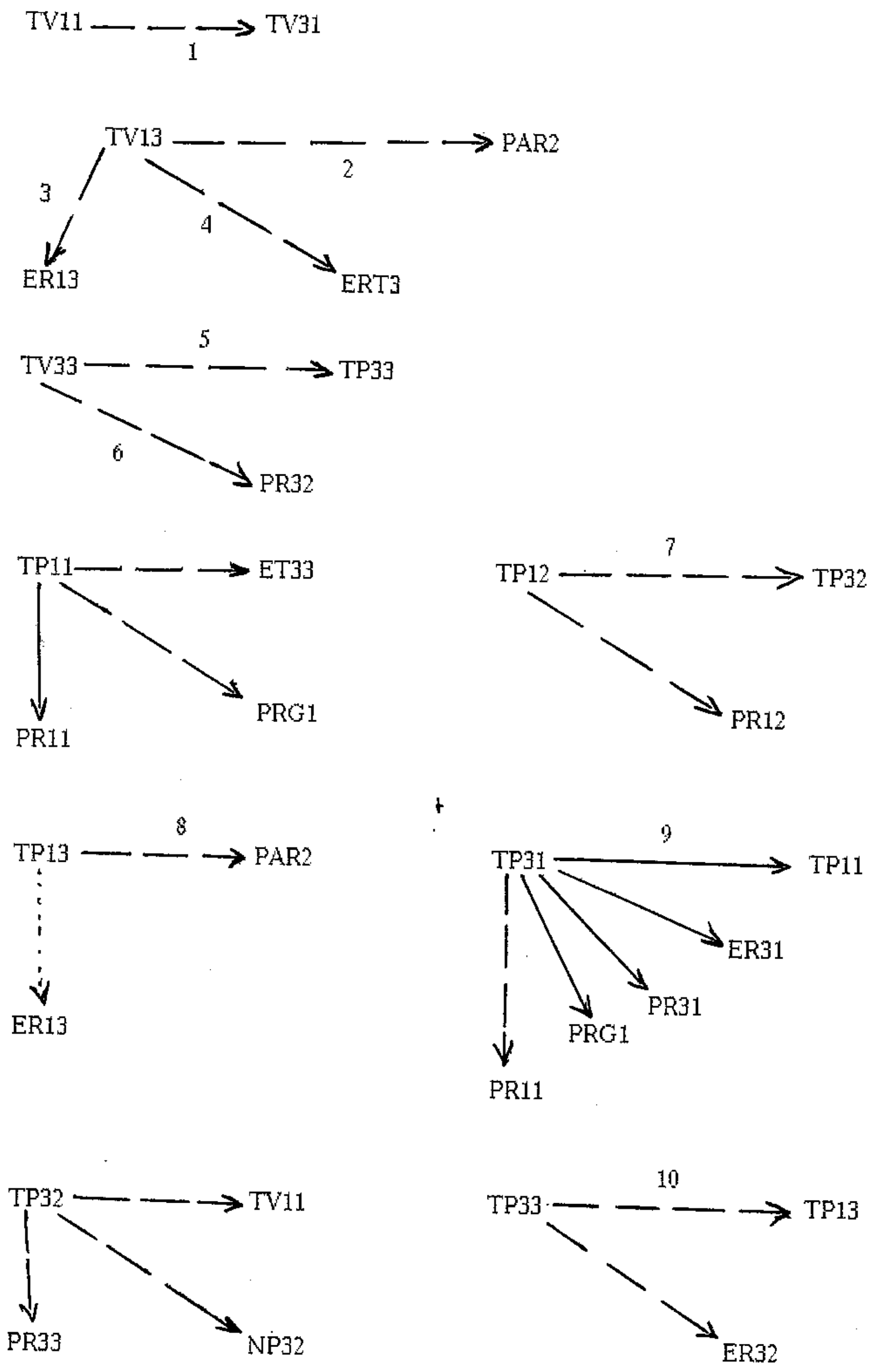
(2) : Un bon pré-test sur P1 ou P2 est plutôt un pré-test sur P2.

(3 et 4) : Un bon pré-test sur P1 ou P2 conduit plutôt à une séance globalement bien réussie.

(5 et 6) : Un bon pré-test sur P3 conduit à un bon post-test et à un progrès moyen, sur P3.

(7) : Un post-test moyen sur P1 ou P2 implique un post-test moyen sur P3.

PRE-TEST ET POST-TEST



(8) : Un bon post-test sur P1 ou P2 est plutôt un bon post-test sur P2.
(9) : Un faible post-test sur P3 implique un faible post-test sur P1 ou P2.
(10) : Un bon post-test sur P3 implique un bon post-test sur P1 ou P2.

En termes de connaissances, on peut en inférer ce qui suit :

- Avant la séance, les connaissances manifestées sur P1 ou P2 d'une part, et les connaissances manifestées sur P3 d'autre part, ne sont pas, semble-t-il, sans aucune relation (implication 1).

- Après la séance, une certaine dépendance entre ces connaissances semble se dessiner : des connaissances moyennes sur P1 ou P2 entraînent des connaissances moyennes sur P3 (imp. 7), des connaissances faibles sur P3 entraînent des connaissances faibles sur P1 ou P2 (imp. 9) et des connaissances bonnes sur P3 entraînent des connaissances bonnes sur P1 ou P2 (imp. 10). Ainsi, en particulier, le niveau des connaissances sur P3 semble être le même que le niveau sur P1 ou P2 (imp. 9 et 10) ce qui laisse penser qu'il y a un transfert de connaissances de P3 vers P1 ou P2. Ceci semble répondre positivement, mais vaguement, à la question de transférabilité des connaissances surtout de P3 vers P1 et P2 que nous nous sommes posée dans cette recherche. Ce transfert, une fois admis, semble être efficace dans le cas de P3 vers P2 (imp. 10 et 8).

- Un bon niveau au départ sur P1 ou P2 conduit à une bonne séance (imp. 3 et 4) et un bon niveau au pré-test sur P3 conduit à un bon post-test et à un progrès moyen (imp. 5 et 6), indépendamment de la qualité de réussite en séance. Ceci semble dire qu'un bon niveau au départ favorise la réussite en séance et permet d'en tirer profit tout en précisant qu'un niveau de départ qui est relativement bon est en fait limité. Mais de bonnes connaissances au départ sur P3 garantissent un progrès moyen sur P3 ce qui n'est pas le cas de P1 ou P2, et laisse penser qu'entre connaissances sur P3 et connaissances sur P1 ou P2, il y a une différence importante. En fait, à part les connaissances relatives au coefficient A qui sont communes aux trois formes P1, P2 et P3, les connaissances mises en jeu dans P3 sont restreintes aux abscisses des points sur x'x, tandis que pour les deux autres formes, ces connaissances portent sur des objets de natures diverses ce qui montre que les connaissances sur P3 sont plus homogènes que celles des autres formes. Les résultats précédents pourraient donc être expliqués par le fait que pour le même type de connaissances, dans le cas d'un domaine de connaissances limité, l'amélioration des performances est plus facile que dans le cas où il s'agit d'un domaine plus vaste.

- Avant ou après séance, de P1 et P2 c'est surtout sur P2 qu'il y a de bonnes connaissances (imp. 2 et 8). Ceci semble illustrer les limites d'un apprentissage spontané des relations équation-parabole dans un environnement de type P1 et la quasi-inaccessibilité du sens graphique de B sans recours à la notion de dérivée.

b) ACTIVITE :

Dans ce graphe, qui se trouve à la page suivante, on voit, en particulier, les implications :

(1) : Un faible nombre de paraboles P1 ou P2 rencontrées en séance se produit plutôt dans le cas de P2.

(2) : Un faible nombre de paraboles P1 ou P2 rencontrées en séance implique une grande réussite en séance sur P1 ou P2.

(3) : Un faible nombre de paraboles P3 rencontrées en séance conduit à un bon post-test et à un grand progrès relativement à P3.

(4 et 6) : Un nombre moyen de paraboles P3 rencontrées en séance conduit à un post-test moyen et à un grand progrès sur P3.

(5) : Un grand nombre de paraboles P3 rencontrées en séance conduit à un faible post-test sur P1 ou P2.

(7) : Un grand nombre d'exercices traités sur P3 en séance conduit à une réussite moyenne sur P3.

(8) : Une réussite moyenne en séance sur P3 conduit à un grand progrès sur P3.

(9) : Un grand nombre d'exercices traités sur P3 en séance conduit à un faible nombre de paraboles P3 rencontrées en séance.

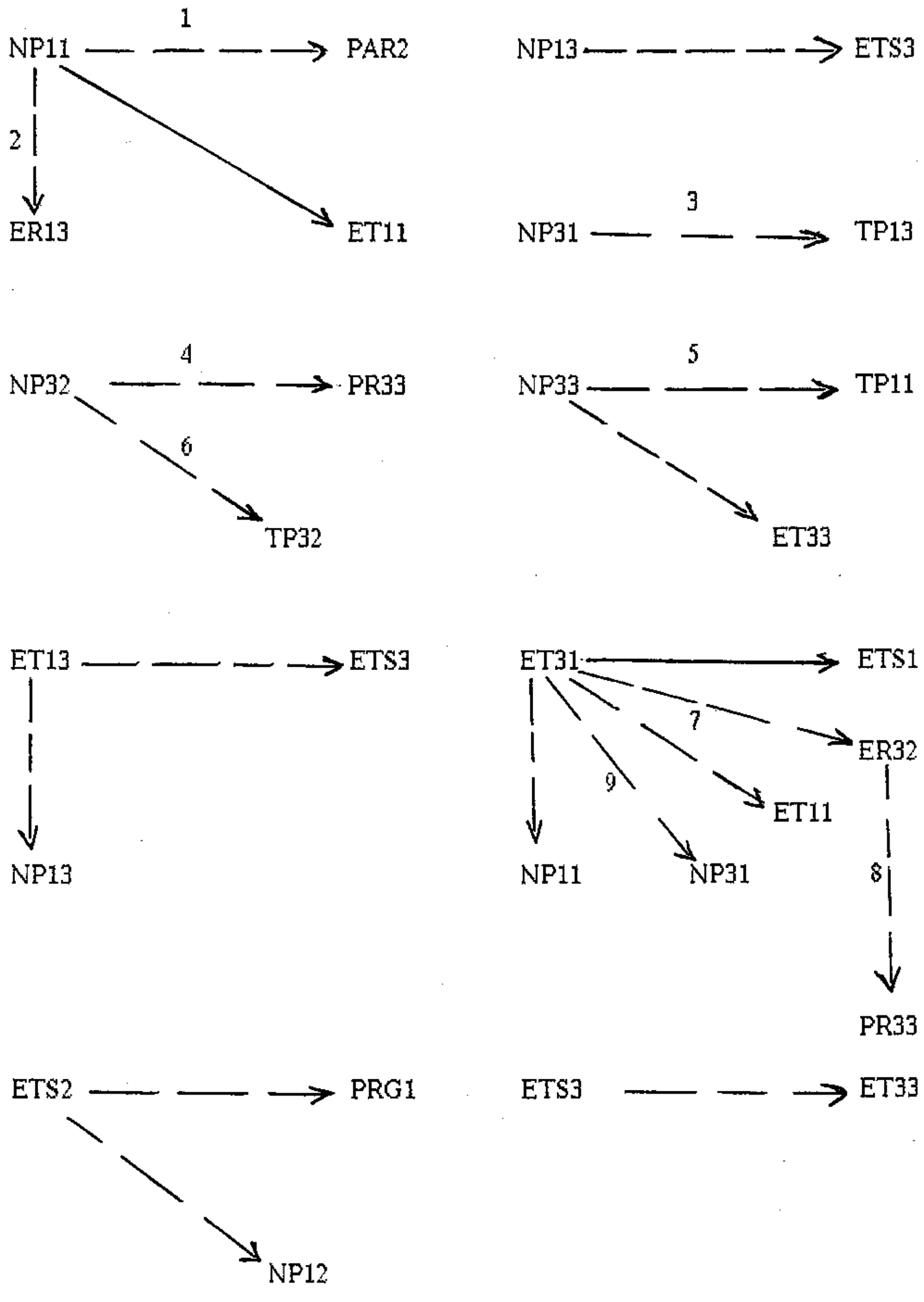
De ce graphe, on peut inférer les faits suivants :

- Dans le cas de P2, un petit nombre de paraboles suffit pour pouvoir mener une bonne séance (imp. 1 et 2).

- Dans le cas de P3, il suffit d'un petit nombre d'exercices et d'un nombre petit ou moyen de paraboles rencontrées pour pouvoir mener une séance moyennement réussie et arriver à un grand progrès (imp. 3, 4, 6, 7 et 8). En revanche un grand nombre de paraboles rencontrées semble conduire à un échec au post-test sur P1 et P2 (imp. 5).

Ainsi il semble qu'un petit nombre, ou un nombre moyen de paraboles, c'est-à-dire un nombre raisonnable de paraboles P2 ou P3 implique un grand progrès sur P2 ou P3 et qu'un nombre excessif (trop dispersé sans doute et sans réinvestissement) conduit à un échec.

ACTIVITE


NP11
1
PAR2
2
ER13
ET11
NP13
ETS3
NP31
3
TP13
NP32
4
PR33
6
TP32
NP33
5
TP11
ET33
ET13
ETS3
NP13
ET31
ETS1
7
ER32
9
ET11
NP11
NP31
8
PR33
ETS2
PRG1
NP12
ETS3
ET33

c) SEANCE ET PROGRES :

Dans ce graphe, qui figure à la page suivante, on voit, en particulier, les implications :

(1) : Une faible réussite en séance sur P1 ou P2 l'est plutôt sur P1.

(2) : Une grande réussite en séance sur P1 ou P2 l'est plutôt sur P2.

(3) : Une séance à faible réussite globale est plutôt une séance sur P1 et P3.

(4) : Une séance à faible réussite sur P1 ou P2 implique une séance à faible réussite globale.

(5) : Une séance à faible réussite globale conduit à un faible post-test sur P1 ou P2.

(6) : Un faible post-test sur P1 ou P2 implique un progrès faible sur P1 ou P2.

(7) : Une séance à réussite moyenne sur P1 ou P2 conduit à un progrès moyen sur P1 ou P2.

(8) : Un grand progrès sur P1 ou P2 implique nécessairement une séance à bonne réussite sur P1 ou P2.

(9) : Un progrès faible sur P3 implique un progrès global faible.

(10) : Un progrès moyen sur P3 implique un progrès global moyen.

(11) : Un grand progrès global implique nécessairement une bonne réussite sur P3 en séance.

(12) : Une réussite moyenne sur P3 en séance implique un grand progrès sur P3.

De ce graphe, on conclut :

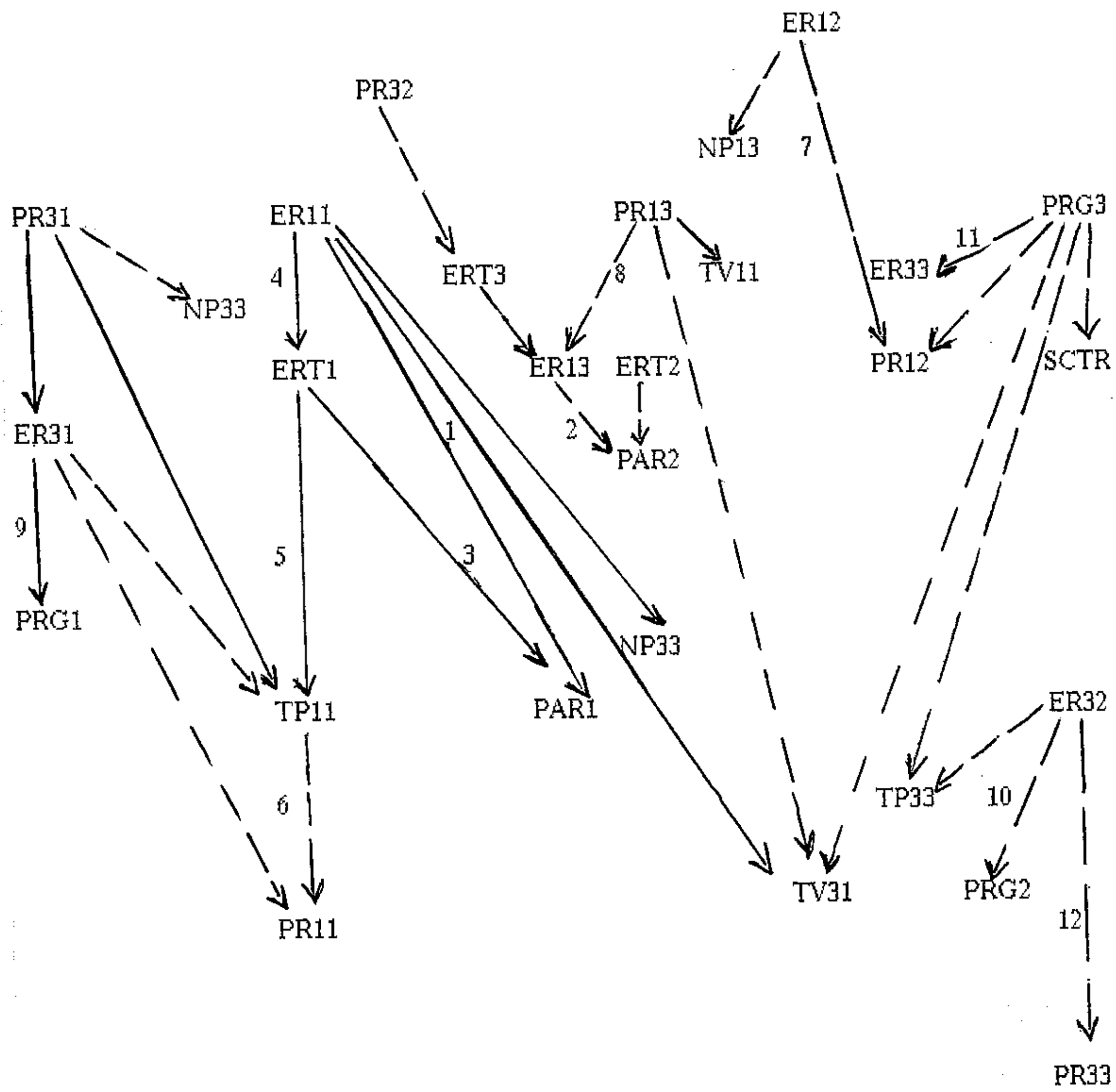
- Relativement à P1 et P2, la réussite faible en séance est associée à P1 (imp. 1 et 3) et la bonne réussite est associée à P2 (imp. 2), ce qui est tout à fait normal en raison de la réussite limitée sur le coefficient B.

- Une séance moyenne ou faible sur P1 ou P2 semble conduire à un progrès faible ou moyen sur P1 ou P2 (imp. 4, 5, 6 et 7). Un grand progrès sur P1 ou P2 semble résulter d'une bonne séance mais une bonne séance ne conduit pas nécessairement à un grand progrès (8) car il peut s'agir, nous le savons, d'une réussite sur P1 qui résulte d'une résolution algébrique - globalement ou partiellement- et n'implique pas la compréhension du sens des coefficients, moyen privilégié de progrès pré-test/post-test.

- A propos de la réussite sur P3, pendant la séance, si elle est faible elle conduit à un progrès global faible (9), si elle est moyenne elle conduit à un progrès global moyen (10) tandis que si elle est grande elle ne conduit pas automatiquement à un grand progrès global (11).

Ainsi, d'une façon générale, la qualité de la réussite en séance sur P3 surtout et la qualité du progrès global sont quasiment les mêmes. Ceci montre, semble-t-il, une deuxième fois, le rôle particulier de P3 dans la progression, à la fois en séance et entre les deux tests.
De plus, une réussite moyenne en séance sur P3 est suivie par un grand progrès pré-test/post-test (12) ce qui voudrait dire qu'un travail moyennement réussi avec P3 pourrait donner un effet retardé plus important sur l'apprentissage.

SEANCE ET PROGRES



Ainsi, dans le cas de P3, le progrès est, en général et qualitativement, au moins aussi important que le niveau de réussite en séance

d) STRATEGIES :

Dans ce graphe, qui se trouve à la page suivante, on voit que :

- La tactique T semble conduire, à une séance où il y a un grand nombre de paraboles P3 rencontrées, ce qui est un signe d'activité, à une séance de faible réussite et à un faible progrès.

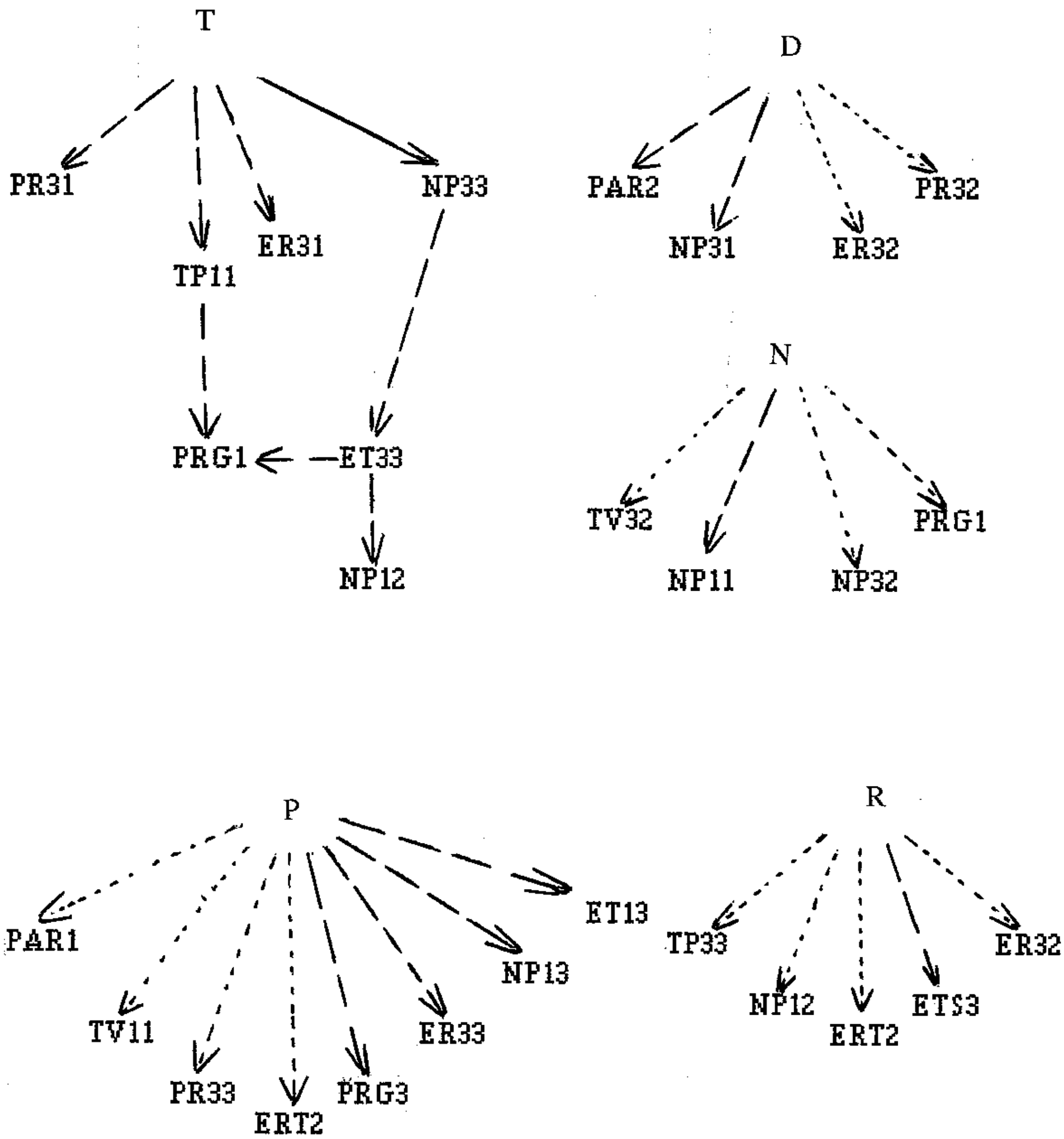
- Les tactiques D semblent être utilisées plutôt avec P2 et conduisent à une séance où il y a un faible nombre de paraboles P3 rencontrées, signe d'une faible activité et, moins vraisemblablement, à une réussite en séance et à un progrès moyen. Le faible nombre de paraboles rencontrées peut être dû à l'utilisation de C qui n'implique pas des tracés et par suite des paraboles auxiliaires.

- La tactique P semble conduire plus vraisemblablement à une séance à la fois de bonne activité et de bonne réussite en séance et à un grand progrès surtout avec P3.

- La tactique N semble plutôt être utilisée par des élèves de niveau moyen au départ (TV32) et conduire moins vraisemblablement à un faible progrès.

- La tactique R semble légèrement conduire à une séance moyennement active (NP12, ETS3) et moyennement réussie (ERT2, ER32, TP33).

STRATEGIES


T
PR31
TP11
ER31
NP33
PRG1
ET33
NP12
D
PAR2
NP31
ER32
PR32
N
TV32
NP11
NP32
PRG1
P
PAR1
TV11
PR33
ERT2
PRG3
ER33
NP13
ET13
R
TP33
NP12
ERT2
ETS3
ER32

VII) SYNTHESE

Les résultats que nous venons de voir, provenant de méthodes d'analyse différentes ne se contredisent pas, au contraire, même si ces méthodes ne donnent pas exactement le même éclairage sur les données, certaines relations apparaissant plus nettement dans une méthode que dans une autre. Chacune d'elles confirme certains résultats, renforce certaines tendances et complète des informations trouvées par les autres méthodes. Mais qu'apprenons-nous finalement par rapport aux questions initialement posées ?

a) AU NIVEAU DE LA CLASSE :

La question était : **est-ce que le type de classe est un facteur d'activité, de réussite et de progrès ?** La réponse est nette : non. En effet :
L'analyse factorielle n'a pas mis en évidence des différences significatives entre les deux classes : Première et Terminale, par rapport aux quatre facteurs principaux de discrimination : performance en séance et au post-test, activité en séance avec P1 et P2, densité de l'activité globale et rapports activité/performance. La classe n'apparaît pas donc comme facteur de réussite et d'activité en séance, ni comme facteur de progrès. L'analyse classique des résultats pré-test/post-test au niveau des connaissances, elle non plus, nous l'avons déjà vu, n'a pas montré de différence significative entre Terminale et Première. La contrainte sur le nombre de variables dans l'analyse hiérarchique des similarités et dans l'analyse implicative, les résultats déjà trouvés et confirmés par l'analyse factorielle, nous ont donc conduit à exclure la variable Classe avec ses deux modalités des méthodes implicatives et hiérarchique.

Qu'est ce qui peut expliquer ce résultat ?
Les objets de savoir qui sont en jeu ne sont pas des objets d'apprentissage actuel ou récent pour ces classes puisque, sauf action spéciale comme ici, entre Première et Terminale il n'y a pas d'évolution de la liaison étudiée entre graphique et algébrique. D'autre part, le bagage cognitif des élèves leur permet, semble-t-il de profiter de la même façon de la séance informatique.

b) LE NIVEAU DE L'ELEVE :

La question était : **est-ce que le niveau de l'élève est un facteur d'activité, de réussite et de progrès ?**
A propos de la réussite et du progrès la réponse est nette : non. A propos de l'activité, la réponse n'est pas claire. En effet :
L'analyse factorielle n'a pas mis en évidence des différences significatives entre les deux modalités sur le plan de la réussite. Par rapport à l'activité, elle a cependant donné l'impression que les faibles sont légèrement plus actifs et les moyens légèrement plus "prudents". Jusqu'à quel point ceci est-il vrai? Pour y répondre, il faut revenir aux fichiers puisque la variable Niveau, avec ses deux modalités Faible et Moyen, a été exclue de l'analyse hiérarchique des similarités et de l'analyse implicative pour les mêmes raisons que les variables associées au niveau de classe.

c) <u>EFFET DE LA SEANCE</u> :

La question était : **les résultats au post-test semblent meilleurs que le déroulement de la séance informatique ne le laissait présager. Dans quelle mesure exacte sont-ils meilleurs? Si c'est le cas, qu'est ce qui peut expliquer ce décalage ?**
La réponse est oui, mais uniquement en ce qui concerne P3, et l'explication n'est pas possible sans le retour aux fichiers. En effet :
d'après l'analyse factorielle, l'axe 1 montre qu'une séance de faible réussite est accompagnée, comme on pouvait s'y attendre, d'un faible post-test. La relation séance-progrès est plus nuancée dans le cas de séance à réussite moyenne ou grande ce qui laisserait penser qu'il n'y a pas transfert automatique de la réussite en séance. L'analyse hiérarchique des similarités confirme la liaison : faible réussite en séance - faible progrès, en effet elle fait apparaître la classe (A1) qui rassemble dans une sous-classe (A11) faible réussite à la séance et faible progrès et dans une autre sous-classe (A12) faible réussite en séance sur P3 et faible progrès sur P3. L'analyse implicative montre que, d'une façon générale, réussite en séance, sur P3 surtout, implique progrès global et que, dans le cas de P3 et en cas de réussite moyenne en séance, le progrès est plus important que ne le laissait prévoir la réussite en séance. C'est un phénomène qui est a priori inattendu mais met en évidence le statut particulier de P3.

Ceci montre que résultat à la session et résultat final vont ensemble avec, dans le cas de P3, un résultat final qui peut être meilleur que celui de la séance. Cet effet à retardement de P3 qui apparaît suite à un travail moyennement réussi en séance tient, semble-t-il, à la simplicité relative des connaissances relatives à P3 mises en jeu et montre qu'un niveau suffisant de familiarité en séance avec ces connaissances constitue une base suffisamment solide pour leur appropriation, ce qui n'est pas le cas pour d'autres connaissances plus complexes. D'autre part, ceci montre un rôle déclencheur de P3.

Ceci suppose qu'on fasse la différence entre connaissances concernant les abscisses des points sur x'x dans le cas de P3 et connaissances concernant les coordonnées du sommet qui n'est pas en général sur x'x, dans le cas de P2. Par rapport au cas P1, les différences sont beaucoup plus nettes. Si on ne fait pas cette différence et que l'on reste au niveau des coordonnées des points, les connaissances sur P2 et P3 sont quasiment de même nature ce qui rend le résultat trouvé moins évident.
Pour comprendre les raisons précises de cette différence apparente d'accessibilité de connaissances a priori voisines, Il nous semble nécessaire d'aller regarder précisément dans les fichiers le rôle joué par P3.

d) <u>L'EFFET DU NOMBRE DE PARABOLES RENCONTREES PENDANT LA SEANCE</u> :

La question était : **est-ce que le nombre de paraboles accompagnées de leurs équations vues tracées, pendant la séance, est un facteur jouant dans l'apprentissage, ou jouant sous certaines conditions ?**
Les analyses n'apportent pas de réponse claire. En effet :

l'analyse factorielle montre partiellement et localement des relations entre nombre de paraboles rencontrées et progrès : on remarque que, d'une part, sur l'axe 2, un très grand nombre de paraboles P1 ou P2 rencontrées est accompagné d'un grand progrès global et qu'un faible nombre de parabole P1 ou P2 rencontrées est accompagné d'un faible progrès global mais, d'autre part, on voit sur l'axe 4 une opposition entre grand nombre global de paraboles rencontrées et bonne séance. L'analyse hiérarchique des similarités, de son côté, semble confirmer que l'effet du nombre de paraboles n'a rien de trivial, puisqu'elle fait apparaître la classe (A12) qui rassemble grand nombre global de paraboles et faible progrès global. L'analyse implicative montre, elle, qu'un nombre de paraboles raisonnable semble associé au progrès et qu'un nombre excessif est plutôt signe d'un échec. Ceci paraît normal du point de vue didactique : en début d'apprentissage et à partir d'un certain seuil, le risque de dispersion de l'élève augmente avec le nombre de paraboles rencontrées.

Au vu de ces résultats nous avons l'impression que les différents types de paraboles ne se comportent pas de la même façon vis-à-vis du nombre de paraboles rencontrées en séance.

e) AU NIVEAU DES TACTIQUES :

La question était à ce niveau : **les différentes tactiques identifiées sont-elles équivalentes vis-à-vis de la réussite ?**
Cette fois-ci, la réponse est clairement : non.

1) TACTIQUE T : tactique qui consiste à utiliser uniquement les tracés dans la recherche de l'équation.
L'analyse factorielle nous a montré que cette tactique est accompagnée de faible réussite et de grande activité en séance. L'analyse hiérarchique des similarités confirme cette liaison. En effet, elle a mis en évidence une classe (A12) associant la tactique T au grand nombre de paraboles rencontrées, au faible résultat en séance et au faible progrès global. L'analyse implicative fait apparaître une implication entre cette tactique et les caractéristiques suivantes : grand nombre de paraboles P3 rencontrées en séance, faible réussite en séance et faible progrès. L'implication n'étant cependant très significative que pour les paraboles P3. D'après notre analyse a priori, T peut être utilisée dans le cadre d'une strtégie d'essai/erreur comme dans le cadre d'une stratégie de lecture/estimation. D'après ce que l'on vient de voir, les résultats statistiques tendent à montrer que pour les élèves concernés on est vraisemblablement dans le premier cas et que cette stratégie n'évolue pas facilement d'une stratégie essai/erreur vers une stratégie lecture/estimation.

2) TACTIQUE D : Il s'agit des tactiques minoritaires C et CT. La tactique C étant celle qui consiste à utiliser, uniquement l'option C alors que la tactique CT utilise les options C et T. D'après l'analyse factorielle ces tactiques sont liées à de bons résultats en séance avec P1 ou P2 et sont plutôt utilisées par des élèves de niveau moyen. Elles sont accompagnées d'une activité globalement faible. L'analyse hiérarchique des similarités confirme partiellement ce résultat parce qu'il en ressort une classe (C2) qui rassemble les tactiques D et des variables de faible activité. L'analyse implicative permet un éclaircissement de ce résultat puisqu'elle montre que cette tactique semble utilisée plutôt avec les types P2 et P3, conduire à une séance à activité

faible et qu'il y a une légère implication de D vers la réussite moyenne et le progrès moyen. Or nous savons que le coût et l'efficacité de C dépendent fortement du choix des points, du type de la parabole et de la combinaison éventuelle avec des lectures directes. La stratégie C, si elle est brute, est coûteuse et peu susceptible de succès et il est normal qu'elle soit liée à activité faible. En revanche elle est très efficace si elle est couplée à la lecture directe et elle permet une croissance de l'activité. Les résultats trouvés semblent donc cohérents mais ils ne sont pas très nets.

3) TACTIQUE N : Rappelons que la tactique N est une tactique de passage à R, passage non accompagné d'une réussite.
D'après l'analyse factorielle, cette tactique est nuancée par rapport à la réussite et accompagnée d'une activité faible avec P1 et P2 mais globalement moyenne. Dans l'analyse hiérarchique des similarités, la tactique N est associée dans la classe (B2) à des variables de réussite et de progrès moyens. L'analyse implicative montre que cette tactique semble être utilisée par des élèves de niveau moyen au pré-test sur P3 et conduire à un faible progrès et une activité moyenne mais les valeurs de l'implication ne sont pas très fortes.
La tactique N regroupe les tactique de passage à R : CR, TR et CTR qui ne se terminent pas par une réussite et que nous avons interprétées à partir du fichier de Michel comme une possibilité de refuge dans le jeu, lié à l'échec. Les résultats statistiques ne confirment pas cette hypothèse puisque la liaison tactique N-faible progrès, par exemple, devrait être forte ce qui n'est pas le cas dans toutes les analyses. Les résultats obtenus laissent penser que la tactique N de transition sans succès vers R peut être liée à d'autres facteurs et accompagner une réussite antérieure à C et T. Le retour aux fichiers permettra, peut-être, d'éclaircir cette question.

4) TACTIQUE P : C'est une tactique de transition vers R se terminant par un succès.
D'après l'analyse factorielle, cette tactique est accompagnée d'une activité grande avec P1 et P2 mais globalement moyenne et de bons résultats. De l'analyse hiérarchique des similarités, il ressort que la classe (C3) rassemble la tactique P et des variables de grand progrès et bonne réussite en séance. L'analyse implicative montre enfin que cette tactique est plutôt utilisée par des élèves de niveau faible au départ, implique une activité moyenne, une bonne réussite en séance et un grand progrès surtout sur P3.
La tactique P semble donc regrouper les tactiques CR, TR et CTR qui transitent vers R par évolution positive et via éventuellement une amélioration progressive de l'utilisation de C, T ou CT. Ceci est conforme aux analyses a priori effectuées.

5) TACTIQUE R : C'est la tactique qui utilise uniquement l'option R sur toute la séance.
D'après l'analyse factorielle cette tactique est nuancée par rapport à la réussite mais elle est associée à une activité globalement moyenne et est utilisée plutôt par des élèves de niveau moyen. De l'analyse hiérarchique des similarités, il ressort que la classe (B1) rassemble la tactique R et des variables d'activité grande et de pré-test moyen sur P1. L'analyse implicative montre que la tactique R semble impliquer une séance moyennement active et moyennement réussie.

D'après notre analyse a priori, la tactique R peut exprimer une stratégie de simple jeu comme une stratégie de capacité de réponse surtout avec P2 et P3 mais exige alors de bonnes connaissances dès le départ. Le fait que les résultats statistiques tendent à montrer qu'il s'agisse d'élèves moyens et non de bons élèves confirme l'idée que la tactique R est plutôt utilisée comme une stratégie de jeu.

Au niveau de l'activité, les résultats statistiques peuvent sembler légèrement discordants. Mais le fait que R ne soit pas systématiquement liée à une activité grande peut laisser penser que l'élève, dans son jeu, prête attention aux feed-back d'où la possibilité d'apprentissage et de progrès moyen mise en évidence par l'analyse implicative.

Donc, globalement et relativement au progrès, il y a opposition entre la tactique T et la tactique N d'une part, les tactiques D et P de l'autre. La tactique R n'est pas si typée que l'on aurait pu a priori le penser par rapport à la réussite.

f) L'ADAPTATION AU JEU ET SON EFFET :

La question était : **l'adaptation au jeu induit-elle nécessairement des apprentissages mathématiques visés transférables dans d'autres environnements ?**
Encore une fois, la réponse est nette : oui. En effet :
Le jeu proposé par le logiciel, dans une partie, consiste en une action R, répondre (éventuellement effectuée après d'autres actions de tracés ou affichage de coordonnées) en visant deux objectifs : o1 (répondre correctement) et o2 (répondre en conservant le maximum du capital). Pratiquement, pour des élèves débutants, ces deux objectifs n'ont pas nécessairement le même poids. Mais l'élève peut jouer en prenant en compte ou non ces objectifs, ou en privilégiant plus particulièrement l'un d'eux.
On appellera "simple jeu" le comportement d'un joueur qui ne se soucie que de donner de réponses directes sans se poser des questions sur l'exactitude de ces réponses ou sur la situation de son capital. Il s'agit en fait d'un jeu où ni l'un, ni l'autre des deux objectifs cités ne sont pris réellement en compte.
On appellera à l'opposé, "jeu réfléchi" le comportement d'un joueur qui essaie de prendre en compte ces deux objectifs, ou au moins o1, en tirant parti des possibilités offertes par le jeu : options avec leurs coûts respectifs, choix du type et explication des feed-back.
Il est manifeste que l'objectif "conserver le maximum du capital" reste un objectif secondaire pour la plupart des élèves, vu la difficulté de réalisation du premier objectif. Une adaptation réussie au jeu se traduira plutôt par le souci de répondre de façon organisée le plus rapidement possible, sans toutefois chercher systématiquement à répondre à coup sûr. **C'est ce comportement qui sera pour nous le signe d'une adaptation réussie au jeu.**
La motivation des élèves se situant dans ce groupe n'est pas en général le seul gain : lorsqu'ils estiment maîtriser suffisamment l'articulation algébrique/graphique pour un type de paraboles, ils passent à l'autre, en quelque sorte comme s'ils souhaitaient renouveler un jeu devenu trop facile.

Une tactique de transition vers R peut donc traduire une stratégie de "jeu réfléchi", mais elle peut traduire aussi une stratégie de transition vers le "jeu simple". Pour faire la distinction, il est nécessaire de voir si la transition accompagne une capacité de réponse directe ou quasi-directe c'est-à-dire si transition accompagne effectivement une réussite. Il est donc très probable que les tactiques P et la tactique R accompagnée d'une réussite en fin de séance soient des tactiques qui traduisent une adaptation positive au jeu.

Nous venons de voir qu'il semble que la tactique R, donc à plus forte raison la tactique R avec succès en fin de séance, est accompagnée d'un progrès et que la tactique P conduit à un grand progrès. L'adaptation au jeu est donc, selon les critères indiqués, semble-t-il, un facteur qui permet un apprentissage réinvestissable dans un environnement traditionnel.

VIII) CONCLUSION

Les méthodes statistiques d'analyse fournissent des réponses claires pour certaines des questions initialement posées et des éléments de réponse seulement pour d'autres.
Les réponses claires sont les suivantes :

- Classe et niveau ne sont pas de facteurs déterminants de réussite et de progrès.
- Les tactiques identifiées ne sont pas équivalentes par rapport à l'apprentissage. Les tactiques de transition vers R par évolution positive des tactiques C, T ou CT sont les mieux adaptées à la réussite.
- L'adaptation au jeu permet réellement un apprentissage.

Mais, si les réponses claires apportées à ces questions sont globalement, conformes à notre analyse a priori pour certaines, pour d'autres justifiables a posteriori du point de vue didactique, il n'en demeure pas moins certaines ambiguïtés et certains doutes sur les interprétations proposées. De plus, des questions restent largement ouvertes : l'ambiguïté qui subsiste sur les relations niveau-activité pendant la séance, l'explication de l'absence de lien entre tactique R et faible progrès et une meilleure appréhension des relations adaptation au jeu - apprentissage.

Les éléments de réponse sont :

- En général réussite en séance et progrès entre pré-test et post-test sont parfaitement cohérents. Néanmoins, dans le cas de P3, la réussite au post-test est meilleure que ne laisse présager la réussite en séance et nous n'avons pas d'interprétation claire de ce phénomène.
- Les différents types de paraboles ne se comportent pas de la même façon vis-à-vis de la variable "nombre de paraboles rencontrées en séance". Ceci montre que le jeu de cette variable n'a rien de trivial mais nous n'avons pas pour l'instant les moyens de l'élucider parfaitement.

Soulignons enfin que ces éléments semblent indiquer que P3 joue un rôle particulier, ce qui n'avait pas été prévu a priori.

Ajoutons que ces réponses résultent d'analyses globales qui ne permettent pas de rentrer dans le détail des comportements d'élèves et des processus d'apprentissage.

Les analyses menées jusqu'ici, tout en étant précieuses, laissent donc un certain nombre de questions largement ouvertes. Pour essayer d'y répondre, il faut, nous semble-t-il, guidés par leurs résultats partiels, revenir à une analyse fine des fichiers qui permette d'étudier les processus qui sous-tendent l'apprentissage ou le non apprentissage des élèves. C'est ce que nous ferons dans la dernière partie de ce chapitre et dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V - PARTIE IV

RETOUR AUX FICHIERS

RETOUR AUX FICHIERS

I) INTRODUCTION

Le retour aux fichiers a pour objectif, rappelons-le, d'assurer les interprétations proposées des résultats obtenus et de nous donner les moyens de lever certaines ambiguïtés. Rappelons les principaux résultats obtenus jusqu'ici :

- Classe et niveau ne jouent pas de rôle particulier dans la réussite en séance et l'apprentissage. Cependant, certains signes donnent l'impression que l'activité de l'élève est en relation avec son niveau.

- Les tactiques identifiées ne sont pas équivalentes par rapport à l'apprentissage mais les résultats concernant les tactiques R (réponses directes) et N (transition négative vers R) ne nous semblent pas conformes à l'analyse des tactiques effectuée.

- L'adaptation au jeu apparaît liée à un grand progrès, ce qui montre que cette adaptation est l'indice d'un apprentissage, mais rien n'explique par quels processus passe cet apprentissage.

- Le progrès au post-test est en général de même niveau que la réussite en séance sauf dans le cas de P3, où il est meilleur. L'hypothèse a posteriori faite sur la simplicité et la facilité de familiarisation relative aux savoirs liés à P3, pour expliquer ce phénomène, doit être testée.

- Sauf dans le cas de P3, le nombre de paraboles rencontrées en séance n'est pas un facteur déterminant dans la réussite en séance et le progrès pré-test/post-test.

Cette revue de fichiers consiste donc en une étude fine des protocoles d'élèves. La méthode choisie pour cette étude consiste à isoler dans la population expérimentale différentes catégories significatives par rapport à l'ensemble des questions posées et à analyser de façon microscopique, à partir des traces logicielles automatiquement recueillies pendant la séance et des résultats pré-test/post-test, des protocoles typiques de ces catégories. Plus précisément, nous avons choisi, comme point d'entrée, les tactiques utilisées. Cette entrée nous a permis d'identifier différentes stratégies effectives sous-tendues par ces tactiques. C'est à ces stratégies anciennes ou nouvelles (selon qu'elles sont déjà identifiées dans l'analyse a priori ou non), qu'ont été associés les cas typiques.

II) ANALYSES

Il s'agit de l'analyse fine de fichiers "typiques" représentatifs de stratégies effectivement suivies, regroupées en fonction des tactiques déjà identifiées. Les tactiques C et CT étant très minoritaires et constituant des catégories complètement isolées ont été exclues. En revanche nous avons retenu la tactique TR, bien qu'elle soit, elle aussi, minoritaire parce qu'elle constitue une composante de la catégorie regroupant les tactiques de transition vers R. Les deux fichiers qu'elle comporte sont donc susceptibles de faire partie des fichiers qui illustrent des cas d'adaptation au jeu, au sens défini dans le chapitre précédent. Leur intérêt dépasse donc, pour nous, la tactique qu'elles représentent.

Pour chacune des tactiques R, CR, T, CTR et TR nous allons présenter les analyses de fichiers typiques représentatifs des différentes stratégies associées. Cette analyse sera organisée par rapport à cinq rubriques : stratégie et fichier typique correspondant, caractéristiques principales de la stratégie, coût, données pré-test/post-test, effet de la séance.
L'analyse nécessite de prendre en compte non seulement les protocoles enregistrés mais aussi les données perceptives fournies par les différents écrans qui leur correspondent. Il ne nous est pas matériellement possible de donner toutes les recopies d'écran correspondant aux protocoles analysés dans ce chapitre. Nous nous bornerons donc à mentionner, pour chaque protocole, le cas échéant, les phénomènes perceptifs qui nous paraissent susceptibles d'avoir joué un rôle dans l'évolution de l'élève. Nous joignons d'autre part, en annexe, les copies d'écrans associées aux exercices retenus dans l'analyse des protocoles d'Isabelle (cf. p. 219) et Igor (cf. p. 222), deux élèves pour lesquels les effets perceptifs semblent avoir joué un rôle déterminant. Précisons que dans l'analyse des fichiers, nous ne nous limiterons pas aux aspects stratégiques ; nous essayerons également de poser des jalons pour l'analyse des processus d'évolution qui sera menée dans le chapitre suivant.

TACTIQUE R

Cette tactique concerne 7 élèves et tous les fichiers sont sans brouillon. L'analyse des différents fichiers conduit à distinguer 3 registres relatifs à la tactique R : la stratégie R1 adoptée par 3 élèves qui relève du "jeu simple", la stratégie R2 adoptée par 3 élèves qui est une stratégie de "jeu avec apprentissage" et la stratégie R3 qui concerne un seul élève qui correspond à la stratégie "capacité de réponse directe".

A) SIMPLE JEU (R1) :

1) Fichier typique : (Géraldine, élève de terminale de niveau faible).

Géraldine travaille avec les deux types P2 et P3. Elle commence sa séance avec P2.

Exercice 1 :				
P2 :	2	4	-3	Parabole $2(x-4)^2-3$
R :	4	-8	13	
R :	-3	27	213	
R :	15	30	501	

Le comportement de Géraldine dans cet exercice relève de ce qui a été qualifié dans notre analyse a priori de "jeu inorganisé" : jeu simultané sur tous les coefficients sans lien apparent entre les propositions. Aux deux dernières propositions, Géraldine reçoit le message suivant : "Tracé hors écran". On remarquera les valeurs "grandes" qu'on ne rencontre pas en général en situation scolaire classique et le fait que le message "Tracé hors écran" ne conduit pas Géraldine à réduire la taille des nombres proposés.

L'exercice suivant est aussi de type P2. Il est lui aussi traité sur le mode "jeu inorganisé". Après ce deuxième échec Géraldine change de forme mais dans les deux exercices de type P3, qui suivent, il n'y a pas de changement apparent de stratégie. Les deux se soldent par un échec et Géraldine revient à la forme P2.

Exercice 5 :				
P2 :	-3	2	5	Parabole $-3\,(x - 2)^2 + 5$
R :	-12	8	-30	
R :	-4	-5	-12	
R :	-2	-2	-2	

Un certain sens semble se construire au sujet du signe de A et plus vaguement à propos de la taille de A. Aucun signe ne permet de dire qu'il y ait un sens qui soit accordé à P et Q.

Les exercices suivants sont alternativement du type P3 et P2. Aucun n'est réussi. Comme le montre l'exercice 14 ci-après, il n'y a pas de confirmation de la compréhension de la taille de A mais l'acquis sur le signe est stable.

Exercice 14 :				
P3 :	2	-6	1	Parabole $2\,(x + 6)\,(x - 1)$
R :	3	12	3	
R :	5	10	20	
R :	1	0	-1	

Cet exercice est le dernier traité.

Pendant la séance, A est rarement correct et les autres coefficients sont toujours incorrects. A part la prise de signification du signe de A, rien ne permet de parler de progression dans cette séance.

2) Caractéristiques :

- Jeu inorganisé sur tous les coefficients simultanément tout au long de la séance,
- Utilisation de grandes valeurs à plusieurs reprises dans les réponses, (interprétée comme le signe d'un simple jeu de réponses),
- Alternance fréquente des formes de paraboles (interprétée comme signe d'un simple jeu de types),
- Grand nombre d'exercices traités (14),

- Très grand nombre de paraboles rencontrées (56),
- Action de base : Tâtonnement,
- Résultat : Echec.

3) Coût : D'après l'analyse a priori, une condition nécessaire pour la réussite d'une stratégie de tâtonnement est que ce dernier soit organisé et soutenu par des compétences d'observation, de perception visuelle, d'émission et test de conjectures. Ceci alourdit le temps de traitement et ne permet de réaliser qu'un petit nombre d'exercices. Le nombre d'exercices étant ici grand, le tâtonnement utilisé nous semble relever plutôt du simple jeu.

La stratégie utilisée par Géraldine, au vu de ces caractéristiques, semble du type "Tâtonnement global" (cf. analyse a priori).

4) Pré-test/post-test : Pas de connaissances manifestées au pré-test. Le post-test ne montre que des connaissances sur le signe de A.

5) Effet de la séance : pas de progrès, excepté sur un point : le signe de A. Cet acquis résiste au post-test.

B) JEU AVEC APPRENTISSAGE (R2)

1) Fichier typique : (Xavier, élève de première de niveau plutôt faible en mathématiques mais remarquable par sa tendance à utiliser le cadre graphique lors du traitement des fonctions et sa préférence de la géométrie à l'algèbre). Xavier traite des exercices de type P1 et P3.
Xavier commence la séance par un exercice sur P1 où il fournit directement des réponses qui semblent traduire une stratégie de jeu inorganisé avec tâtonnement global. Echec complet et passage à la forme P3 toujours dans le cadre d'un jeu inorganisé avec R, mais Xavier s'accroche à la forme P3. Voici le deuxième exercice de la forme P3 :

Exercice 3 :				
P3 :	-1	3	-4	Parabole -1 (x - 3) (x + 4)
R :	2	5	8	
R :	-2	5	-6	
R :	-2	5	3	

Le signe de A est corrigé au second coup et le jeu s'organise essentiellement sur le troisième coèfficient S qui est enfin correct à la troisième réponse. On ne sait pas à ce niveau si la bonne valeur proposée est due au hasard ou si elle résulte de l'observation de l'effet graphique de S.

Exercice 4 :				
P3 :	3	-1	4	Parabole 3 (x + 1) (x - 4)

R :	2	-3	5
R :	3	-3	-6
R :	3	-1	4

Il n'y a pas de réinvestissement direct de la réussite partielle à l'exercice précédent, excepté pour le signe de A. Cette fois, la taille de A est correcte dès le second essai. Au départ les valeurs sont fausses pour R et S mais les signes sont corrects. A la deuxième réponse, R est conservé, A est ajusté et le signe de S est modifié. Perceptivement, la parabole se décale fortement vers la gauche de l'écran avec un effet de quasi-symétrie. Peut-être est-ce cet effet perceptif qui joue le rôle de facteur déclenchant vis-à-vis de l'interprétation de R et S et explique la troisième réponse complètement correcte.

L'exercice suivant sur la forme P3 confirme l'hypothèse de sens attribué à A, R et S; réponse bonne du premier coup. Xavier retourne ensuite à la forme P1, ce que nous attribuons (contrairement au cas de Géraldine) à l'impression de maîtriser la situation P3.

Exercice 6 :				
P1 :	2	8	1	Parabole $2x^2 + 8x + 1$
R :	3	5	-6	
R :	2	-4	-6	
R :	2	-2	-6	

Dès le départ le signe de A est respecté et la valeur exacte est trouvée au second essai : il y a donc transfert de P2 à P1 sur ce point. Mais il n'y a pas, en revanche, de transfert direct des acquisitions sur R et S à C bien qu'il s'agisse ici aussi des coordonnées d'une intersection avec les axes.

Après chaque réponse, la machine signale à Xavier que les valeurs de B et C sont toutes les deux erronées. La valeur de B est pourtant la seule qui change d'une réponse à l'autre. Il semble que le jeu s'organise autour de B et que Xavier semble cibler le sens de B ce qui n'est pas, on le sait (cf. analyse a priori) le plus accessible.

Exercice 7 :				
P1 :	-2	6	-5	Parabole $-2x^2 + 6x - 5$
R :	-3	5	7	
R :	-3	5	-6	
R :	-3	5	1	

Apparemment une régression sur A semble se produire puisque le signe de A est correct mais que la valeur, erronée, est conservée dans les essais successifs. En revanche, il semble qu'après l'échec à l'exercice précédent, ce soit le sens de C qui soit maintenant visé. Mais sans résultats tangibles même au seul niveau du signe alors que Xavier propose en seconde réponse la valeur -6 très proche de la valeur correcte. Malgré les deux échecs sur la forme P1, Xavier conserve cette forme dans l'exercice suivant, ce qui semble prouver qu'il se situe bien dans une optique d'apprentissage.

Exercice 8 :				
P1 :	-3	0	-9	Parabole $-3x^2 - 9$
R :	-3	7	-9	
R :	-3	0	-9	
R :	-3	0	-9	

Xavier rencontre ici une situation particulière puisque B=0. La valeur de A est cette fois-ci, d'emblée correcte. La valeur de C proposée est, elle aussi, correcte dès la première réponse. Le jeu ciblé à l'exercice précédent sur C semble maintenant aboutir. B est corrigé dès le second coup, et Xavier réalise sa première réussite sur la forme P1.
Cette subite compréhension de C n'était en rien annoncée dans l'exercice précédent. On peut se demander si la rencontre d'un cas particulier n'a pas joué ici le rôle de facteur déclenchant.

Mais, pour Xavier le jeu avec P1 n'est pas encore terminé. Dans les trois exercices suivants, il continue avec ce type. Dans les trois cas, C est d'emblée bon, le signe de A aussi et, sauf dans un cas, la taille de A finit par être correctement ajustée. En revanche, B reste toujours incorrect. On voit donc une confirmation du sens acquis à propos de C et A.

Mais la réussite avec P1 reste incomplète puisque la valeur de B n'est jamais trouvée dans les exercices ultérieurs. On peut donc inférer que, dans l'exercice 8, la reconnaissance de B était liée à l'aspect cas particulier.

2) Caractéristiques :

- Jeu organisé : coefficient par coefficient
- Changement de forme après réussite confirmée ou stabilité sur un type : jeu organisé de types
- Nombre d'exercices traités moyen (11)
- Nombre de paraboles rencontrées moyen (41)
- Prise en compte des feed-back
- Actions de base : essais, conjectures, test
- Résultat : Réussite d'abord sur P3 puis sur P1 (excepté B).

3) Coût : puisqu'il s'agit de tâtonnement, la seule composante significative mesurable est le temps de traitement d'un exercice. Cette fois-ci le temps mis sur un exercice est plus long puisque le nombre d'exercices traités est moyen. Ce temps supplémentaire semble être utilisé pour mettre en place une stratégie de tâtonnement constructif basée sur l'observation, la prise en compte des feed-back, l'émission des conjectures et leur test.

La stratégie utilisée par Xavier semble donc pouvoir être rattachée à la stratégie Tâtonnement Essai/erreur, coefficient par coefficient (cf. analyse a priori).

4) Pré-test/post-test : Au pré-test les connaissances manifestées sont réduites au signe de A. Au post-test, on note de très bonnes connaissances sur P3. A propos de P1, les connaissances qui apparaissent sont celles sur A, C et Bnul.

5) Effet de la séance : Progrès sur P3, Progrès limité sur P1 mais transfert complet des acquis en séance.

C) <u>CAPACITE DE REPONSE DIRECTE</u> (R3)

1) Fichier typique : (Christian, élève de première, de niveau moyen)

Christian traite en séance des exercices sur les formes P2 et P3. Il commence avec P2.

Exercice 1 :				
P2 :	-1	2	-8	Parabole $-1\,(x-2)^2-8$
R :	-5	2	-8	
R :	-4	2	-8	
R :	-3	2	-8	

P et Q sont corrects d'emblée, le signe de A aussi. Le jeu porte sur la taille exacte de A. Les propositions qui respectent l'ordre n'aboutissent cependant pas.

Exercice 2 :				
P2 :	-2	2	2	Parabole $-2\,(x-2)^2+2$
R :	-1	2	2	
R :	-2	2	2	

La taille de A proposée, qui est proche de la bonne, est vite corrigée. Le même phénomène se reproduit dans l'exercice 3. Après deux succès sur la forme P2, Christian change de forme.

Exercice 4 :				
P3 :	-2	-3	1	Parabole $-2\,(x+3)\,(x-1)$
R :	-2	-1	8	
R :	-2	2	4	
R :	-2	-2	4	

A est correct dès le début. Les valeurs proposées pour R et S sont en fait les valeurs de P et Q de la forme P2 de la parabole correspondante : un transfert sans adaptation semble donc se produire. Il est difficile d'interpréter les deux réponses suivantes : les valeurs absolues ne sont pas éloignées de celles des coefficients cherchés. Un essai d'adaptation du transfert, peut-être. L'exercice suivant semble confirmer cette interprétation.

Exercice 5 :				
P3 :	1	-1	6	Parabole 1 (x + 1) (x - 6)
R :	1	0	-6	
R :	1	-1	6	

A est d'emblée correct. Un coefficient est trouvé mais avec une erreur de signe. Le -6 n'était pas prévisible à partir de ce qui précède si on ne prend pas en compte notre hypothèse précédente. Le tracé qui apparaît à l'écran et qui passe par l'origine est un tracé quasiment-symétrique de la parabole donnée par rapport à l'axe des y. Au coup suivant le signe - est corrigé et R aussi est bon. Peut-être faut-il voir là l'effet du feed-back global, ou le rôle déclenchant joué par le passage par 0.

Après deux autres exercices sur P3 auxquels Christian répond correctement du premier coup, il change de forme. Deux exercices sur P2 aussi bien réussis que ceux qui précèdent. Retour à P3 et réussite du premier coup avec la parabole 2(x+2)(x+3) mais échec sur le dernier exercice.

Exercice 11:				
P3 :	2	2	2	Parabole 2 (x -2) (x - 2)
R :	3	2	3	
R :	2	1	2	
R :	2	2	-2	

Le cas particulier R=S=A semble déstabiliser les connaissances sur P3 manifestées précédemment. A est vite corrigé mais il semble que la valeur 2 commune à A, R et S ne semble pas logique pour Christian.
Une contre-performance sur P3 en fin de séance.

2) Caractéristiques :

- Réponse correcte, partiellement ou globalement, dès le début,
- Changement de forme, comme dans R2, après réussite confirmée ou stabilité : jeu de types organisé,
- Nombre d'exercices traités moyen (11),
- Nombre de paraboles rencontrées faible (20),
- Prise en compte des feed-back,
- Résultat : Réussite dès le début de la séance. Très bonne familiarisation avec A en fin de séance,
- Actions de base : Lecture et estimation.

3) Coût : en raison du coût élevé de l'option R, la tactique R a priori, réduit le nombre de coups sur un exercice, et permet un grand nombre d'exercices sur une séance. Le nombre moyen d'exercice traités montre qu'il y a un temps réservé au feed-back et à la lecture et l'estimation.

La stratégie utilisée par Christian sur toute la séance semble pouvoir être rattachée à la stratégie globale Lecture/Estimation (cf. analyse a priori) dans le cas de P2. Pour P3 cette stratégie est d'abord mise en défaut, puis elle est rétablie.

4) Pré-test/post-test : Au pré-test Christian a manifesté des connaissances, sur les différents aspects des coefficients de P2 excepté l'ordre sur ces coefficients, et en ce qui concerne P3, sur A uniquement. Au post-test toutes les réponses aux questions du questionnaire sont correctes.

5) Effet de la séance : progrès sur P3 et P2 pendant la séance, transfert complet pour P2 au post-test qui en revanche, pour P3, parait meilleur que la fin de séance ne le laissait présager.

Finalement, les 7 protocoles d'élèves relevant de la tactique R se répartissent sur les 3 stratégies que nous venons de voir.

1) la stratégie R1 jeu simple : elle permet de traiter un grand nombre d'exercices pendant la séance mais sans réussite. Elle s'accompagne de très faible progrès pré-test/post-test. Cette stratégie est basée essentiellement sur le tâtonnement simultané sur tous les coefficients. Comme le montrent ses caractéristiques, elle met en jeu un grand nombre de paraboles et consiste en un jeu de réponses et de types inorganisés. Cette stratégie est globalement conforme à l'analyse a priori.

2) la stratégie R2 jeu avec apprentissage : tout en permettant de traiter un grand nombre d'exercices et d'obtenir une réussite limitée pendant la séance, elle est accompagnée d'un progrès surtout sur P3. A la base de cette stratégie il y a la prise en compte du feed-back, l'élaboration des conjectures et leur test, favorisée par le jeu séparé sur les coefficients. Cette stratégie est marquée par un jeu de types très organisé : changement de type après réussite confirmée ou stabilité. Notre analyse a priori n'avait pas prévu cette stratégie.

3) la stratégie R3 avec capacité de répondre : elle permet de traiter avec réussite un grand nombre d'exercices sur P2 et P3 pendant la séance et donne de très bonnes performances au post-test. Cette stratégie est basée sur la lecture et l'estimation et elle s'accompagne d'un progrès moyen, puisque beaucoup des connaissances visées, comme on pouvait s'y attendre, sont déjà disponibles au pré-test.

Dans les trois cas le transfert des acquis de la séance au post-test est complet.

Notre analyse a priori ne prévoyait que deux stratégies possibles avec R : le simple jeu qui n'induit pas d'apprentissage et la capacité de réponse directe. Dans les deux cas, nous nous attendions donc à des progrès faibles. Les résultats statistiques ont attiré notre attention parce qu'ils étaient partiellement incompatibles avec cette analyse. L'analyse des fichiers nous montre que l'incompatibilité constatée est en fait liée à l'existence d'une troisième stratégie de jeu avec apprentissage non repérée a priori. L'existence de cette troisième stratégie explique que la tactique R apparaisse proche du progrès moyen dans les analyses statistiques.

Au niveau de la variable activité, nous avions, pour expliquer le fait que R ne soit pas systématiquement liée à une activité grande, formulé l'hypothèse qu'une activité moyenne avec R pouvait laisser penser que l'élève, dans son jeu, prêtait une attention soutenue aux feed-back reçus. Nous en avions déduit que R accompagnée d'une activité moyenne devait être liée à un plus grand apprentissage. Cette hypothèse s'est trouvée confirmée par l'analyse des fichiers via la stratégie R2. Ainsi donc, si la stratégie R nous avait alerté par des résultats partiellement ambigus et discordants, c'est parce qu'elle regroupe trois stratégies aux caractéristiques distinctes, par rapport à l'activité, au nombre de paraboles rencontrées, aux caractéristiques pré-test et post-test et à la réussite, dont nous ne cernions, via les analyses statistiques effectuées, que les effets moyens.

TACTIQUE T

Les 5 fichiers qui relèvent de cette tactique sont tous sans brouillon et l'analyse montre qu'ils correspondent effectivement à une même stratégie qui ne permet pas de mettre au niveau de la perception les relations entre les caractéristiques algébriques et les caractéristiques graphiques à propos des paraboles.

1) Fichier typique :(Grégory, élève de première de niveau très faible).

Grégory traite des exercices de type P2 et de type P3. Il commence par P2.

Exercice 1 :				
P2 :	-3	-4	2	Parabole $-3(x+4)^2+2$
T :	-1	2	3	
T :	2	3	4	
T :	-2	-1	3	
R :	3	2	1	

Les valeurs proposées montrent un jeu inorganisé sur les 3 coefficients à la fois. Le signe de A n'est pas respecté. Le signe de Q est bon sur tout l'exercice. Le recours à R avant épuisement du capital semble plutôt refléter la volonté de savoir l'équation de la parabole affichée à la fin de l'exercice que de fournir une réponse. Au premier échec, Grégory change de forme.

Exercice 2 :				
P3 :	-3	6	-1	Parabole $-3(x-6)(x+1)$

T :	-3	-1	2
T :	-2	3	-1
T :	1	-2	3
T :	-1	2	-3
R :	-2	3	2

La valeur -1 proposée pour R et S au premier et au second tracé est correcte mais il semble qu'elle n'ait pas été repérée comme telle par Grégory puisqu'elle ne figure pas dans la réponse donnée. Le signe de A finit par être correct.

Le signe de A se stabilise dans la séance. Le jeu s'organise autour de A uniquement. A finit parfois par être bon. La réponse globale est, en revanche, toujours incorrecte. Grégory traite en tout 13 exercices et il change à 5 reprises de forme d'équation.

2) Caractéristiques :
- Jeu inorganisé au début mais ensuite s'organisant autour de A,
- Valeurs comprises entre -5 et 5,
- Grand nombre d'exercices traités (13),
- Très grand nombre de paraboles rencontrées (65),
- Peu de changements de forme,
- Tâches de base : Tracer, Comparer,
- Echec en séance.

3) Coût : le coût calcul et le coût connaissances sont nuls. Le coût temps est faible puisque il y a un grand nombre d'exercices traités en séance.

La stratégie de Grégory peut être rattachée, nous semble-t-il, à la stratégie d'essai-erreur contrôlée par l'option T. Elle ressemble à R1 mais, si elle permet plus d'essais à chaque exercice, en revanche, elle n'offre pas la validation partielle qu'offre R1.

4) Pré-test/post-test : au pré-test aucune connaissance n'est manifestée. Au post-test la seule réussite concerne le signe de A.

5) Effet de la séance : la séance montre une maîtrise du signe de A. Cet acquis est transféré au post-test.

La tactique T qui est suivie par 5 élèves apparaît en fait comme <u>une version plus prudente de la stratégie R1 simple jeu</u>. Cette stratégie est basée sur la comparaison de tracés et le tâtonnement. Elle permet de traiter beaucoup d'exercices mais elle conduit à un progrès très faible. Ceci confirme et précise en quelque sorte le résultat analogue qui ressort de l'analyse statistique.

Une question se pose néanmoins. Pourquoi la tactique T qui ressemble en apparence à la tactique R ne conduit pas elle aussi à un progrès moyen ? Pourquoi avec la tactique T s'agit-il effectivement du jeu simple et ne peut-il y avoir d'apprentissage comme dans le cas de la stratégie R2 ? Nous avons déjà évoqué une différence entre l'option R et l'option T : la validation globale et partielle des propositions. Voyons comment cette différence pourrait expliquer la différence entre les deux tactiques.

- Avec T l'élève dispose de plus d'essais puisque le coût de l'option T est inférieur à celui de l'option R. Mais ceci ne peut favoriser l'apprentissage que s'il y a mémoire des essais et intégration dans l'interprétation des feed-back successifs. Ceci est incompatible avec le tâtonnement inorganisé qui semble ici associé à T.

- On voit aussi le rôle général, que nous tenterons de préciser dans le chapitre suivant, joué par les cas particuliers dans le déclenchement des prises de sens. Or, jouer avec R, vu le coût de R, amène à traiter plus d'exercices que T (pour un même niveau de jeu) donc augmente la probabilité de rencontrer des cas particuliers.

- Pour chacune de ces tactiques, il nous semble qu'un processus d'apprentissage peut être modélisé par un cycle de base formé d'actions, étapes et associations, qui se répète, avec plus ou moins de différence, au cours du traitement d'un exercice. Algorithmiquement, de façon très simplifiée, il s'agit de la répétition jusqu'à donner la bonne proposition, ou avoir épuisé son capital, du cycle suivant :

1) Proposer un triplet,
2) Lier le triplet à la parabole correspondante tracée,
3) Comparer la parabole tracée à la parabole donnée,
4) Identifier les différences entre les 2 paraboles,
5) Traduire les différences en termes de différences entre les coefficients correspondants,
6) Reprendre en 1.

Les liaisons 4 et 5 sont, dans le cas de R, théoriquement transparentes à l'élève à cause de la validation globale et partielle. La liaison globale 3, non transparente dans le cas de T, devient une triple liaison transparente entre les coefficients associés deux à deux à cause de la validation partielle.

Ainsi le nombre des liaisons transparentes, est plus grand dans le cas de l'option R que dans le cas de l'option T, et de ce fait, la tactique R est, peut-être, plus adaptée à l'apprentissage que la tactique T.

TACTIQUE CR

Huit fichiers relèvent de cette tactique et cette fois-ci, tous les fichiers sont accompagnés de brouillons. L'analyse des fichiers concernés amène à distinguer trois stratégies effectives regroupées dans cette tactique : CR1 ou stratégie "réussite avec C puis passage à R" utilisée par 3 élèves, CR2 ou stratégie "C avec des points particuliers puis passage à R" utilisée par 2 élèves et CR3 ou stratégie "échec avec C et refuge dans R", utilisée par 3 élèves.

A) UTILISATION REUSSIE DE "C", PASSAGE A "R" : Cette stratégie semble adoptée par les élèves qui ont la possibilité de répondre avec C, qui utilisent C de façon coûteuse, comme en témoignent leurs brouillons, mais réussissent. Ils finissent par laisser tomber l'option C, bien qu'elle leur assure la réussite. On peut penser que, pour un élève, passer son temps à faire des calculs avec papier et crayon devant un ordinateur, n'est pas conforme à l'idée qu'il se fait de l'activité elle-même. Mais on voit aussi que la réussite avec C ne met pas nécessairement ces élèves dans une position favorable à la réussite ultérieure avec R car leur utilisation de C se base uniquement sur le calcul.

Sur le plan de l'apprentissage des relations entre coefficients et graphe dans ces conditions, le passage de C à R n'est pas le bon choix. En effet, réussir à trouver les bons coefficients par calcul peut se faire, notamment sur P1, sans se préoccuper du sens à donner aux coefficients tandis que (cf. analyse a priori) l'idée de la recherche du sens de ces coefficients est une condition nécessaire de la réussite avec R.

Les fichiers des 3 élèves qui relèvent de cette tactique confirment cette hypothèse. Ils basculent, en effet, dans un jeu de type R1, ce qui montre la coupure entre calcul algébrique et interprétation graphique.

1) Fichier typique : (Fabien, élève de terminale, de niveau moyen)

Fabien traite des exercices sur les formes P1 et P3. Il commence avec P1.

Exercice 1 :				
P1 :	-2	4	5	Parabole $-2x^2 + 4x + 5$
C :	1	7		
C :	-1	-1		
C :	2	5		
R :	2	3	2	
R :	-2	4	5	

Le brouillon montre que la première réponse proposée provient d'erreurs de calcul dans la résolution du système correctement formé à partir des coordonnées affichées. Suite au message d'erreur envoyé par la machine, Fabien refait les calculs, décèle l'erreur, la corrige et propose les bons coefficients. Au deuxième exercice, qui est toujours sur P1, le traitement ne change pas. La première réponse n'est pas correcte du fait d'erreurs de calcul, mais la seconde l'est.

Exercice 3 :				
P1 :	1	-3	-4	Parabole $x^2 - 3x - 4$
R :	3	-2	3	
R :	-2	4	5	
R :	1	-2	1	

Il y a ici un passage à R mais aucune trace de calcul ne figure sur le brouillon. Il s'agit d'un jeu inorganisé sur les coefficients simultanément puisque rien n'explique les valeurs choisies. Aucun acquis évident sur les coefficients même si la valeur correcte de A est donnée à la troisième réponse.

L'exercice 4 ne montre pas d'évolution. La réussite sur A dans l'exercice précédent n'est pas réinvestie, le signe de A n'est même pas respecté. Devant l'échec complet, Fabien change de forme. Ces caractéristiques sont en fait typiques de la stratégie R1.

Exercice 5 :				
P3 :	-1	2	-3	Parabole -1 (x - 2) (x + 3)
R :	2	6	4	
R :	3	-4	5	
R :	-2	5	1	

Rien ne permet a priori d'expliquer les valeurs proposées. Le signe de A n'est pas toujours respecté. Il est correct à la fin mais peut-être par hasard. La symétrie entre R et S ne semble pas remarquée par Fabien, vu la reprise de la valeur 5 avec changement de place dans la troisième réponse.

Les deux exercices 6 et 7 portent sur P3 et sont les derniers de la séance. Ils ne montrent rien de plus, excepté la stabilité acquise du signe de A.

2) Caractéristiques :

Au début de séance :

- Calculs effectués avec la stratégie C brute (brouillon) d'où réussite sur P1 et échec sur P3,
- Passage presque obligé par des calculs faux,

Ensuite :

- Jeu inorganisé avec R (R1),
- Nombre d'exercices traités faible (7),
- Nombre de paraboles rencontrées faible (24),
- Actions de base : tâtonnement,
- Résultat : échec pendant la séance excepté sur le signe de A.

3) Coût : le coût calcul élevé et le nombre faible d'exercices traités en séance, tout deux prévus par l'analyse a priori dans le cas de la stratégie C brute sont nettement apparents dans l'analyse. Le coût connaissances est bien visible avec C mais il semble nul après passage à R.

La stratégie rattachée à C semble être ici une stratégie ponctuelle brute (cf. analyse a priori des stratégies). Ne permettant pas une séance aisée et active, cette stratégie est remplacée dans la suite par la stratégie R simple jeu. Cette stratégie se schématise par :

$$CR1 : \quad C \xrightarrow[\text{Succès}]{} R1$$

4) Pré-test/post-test : Au pré-test aucune connaissance n'est décelée. Au post-test seule une reconnaissance du signe de A apparaît.

5) Effet de la séance : très faible progrès complètement transféré au post-test.

B) "C" A PARTIR DES POINTS PARTICULIERS, PASSAGE A "R"

1) Fichier typique : (Antoine, élève de première de niveau moyen).

Antoine traite en séance des exercices sur les formes P2 et P3. Il commence avec P3.

Exercice 1 :

P3:	-2	1	3	Parabole -2 (x - 1) (x - 3)
C :	2	2		
C :	0	-6		
C :	1	0		
R :	-6	1	1	
R :	2	1	1	

Le point de coordonnées (2 ; 2) est le sommet de la parabole tracée. Les coordonnées affichées sont celles des 3 points particuliers le 4ème étant bien entendu celui de coordonnées (3 ; 0).

Au brouillon, on trouve :

$$a\,(2 - r)\,(2 - s) = 2\,;$$
$$a\,(0 - r)\,(0 - s) = -6\,;$$
$$a\,(1 - r)\,(1 - s) = 0;$$

puis :

$$a\,(4 - 2s - 2r + rs) = 2\,; \quad a\,r\,s = -6\,; \quad a(1 - s - r + rs) = 0\,;$$

puis : $r = 1$ ou $s = 1$ et $a\,r\,s = -6$ et $a = -6$. Ce qui explique la première proposition.

Remarquons qu'il a remplacé R et S simultanément par 1 en changeant le "ou" en "et".

On voit aussi écrit : $a\,(4\text{-}2\text{-}2+1) = 2$ et $a = 2$. Ce qui explique la seconde réponse. Remarquons que la valeur 1 de S a été conservée bien que la machine ait mentionné que dans la première proposition S n'était pas correct.

Exercice 2 :				
P3:	-2	4	0	Parabole -2 (x - 4) (x)
C :	2	8		
C :	0	0		
C :	4	0		
R :	-2	0	4	

Cas particulier : la parabole tracée passe par l'origine. Le point de coordonnées (2 ; 8) est le sommet. Cette situation réduit le nombre de points qualifiés de particuliers à 3. Elle conduit Antoine au système:

$$\begin{cases} a\,(2 - r)\,(2 - s) = 8\,; \\ a\,(0 - r)\,(0 - s) = 0\,; \\ a\,(4 - r)\,(4 - s) = 0\,; \end{cases}$$

et ensuite :

$r = 0$ ou $s = 0$; $r = 4$ ou $s = 4$; $a\,(2 - 0)\,(2 - 4) = 8$;
$r = 0$; $s = 4$; $a = -2$; et la bonne réponse.

Ici la présence des 2 racines empêche le glissement du "ou" vers le "et" de l'exercice précédent.

On peut se demander si cette réussite aurait pu se produire si la parabole rencontrée n'avait pas été particulière. Par exemple, Antoine aurait pu reconduire un comportement analogue à celui de l'exercice 1. Il semble que la situation particulière rencontrée joue ici un rôle déclencheur. L'occasion bien saisie semble conduire Antoine au sens de R et S. Les 3 exercices suivants sont réussis dès la première réponse directe ou la deuxième. A titre d'illustration, voici l'exercice 3 réussi en deux coups.

Exercice 3 :				
P3 :	3	5	1	Parabole 3 (x - 5) (x - 1)
R :	2	1	5	
R :	3	1	5	

Le passage à R constaté est ici un passage de type P3 (capacité de réponse quasi-directe).

Après sa réussite avec P3, Antoine, comme c'est le cas fréquent avec R2 ou R3, change de forme.

Exercice 6 :				
P2 :	-1	2	1	Parabole $-1\,(x - 2)^2 + 1$

C :	0	-3	
C :	2	1	
C :	-1	0	
R :	-2	1	-1
R :	-1	-3	2

Vu le brouillon, Antoine pose un système de 3 équations en A, P et Q qu'il forme à partir des coordonnées affichées :

$$\begin{cases} A\,(0 - P)^2 + Q = -3\,; \\ A\,(2 - P)^2 + Q = 1\,; \\ A\,(-1 - P)^2 + Q = 0 \end{cases}$$

mais il n'entame pas la résolution. Il semble qu'il procède ensuite, de façon similaire au cas de P3 en mode réponse. Les valeurs 1 et -1 qui apparaissent dans la première réponse sont peut-être liées aux points (2 ; 1) et (-1 ; 0). Dans la 2ème proposition, il semble corriger A et proposer des valeurs à P et Q qui elles aussi sont liées aux points particuliers de coordonnées (0 ; -3) et (2 ; 1).
Soulignons que les points particuliers ne sont pas utilisés cette fois-ci comme précédemment. Ils sont utilisés directement dans les réponses proposées. Ce changement de comportement qui suit la réussite à P3 peut être interprété comme signe d'un transfert non adapté du cas P3 au cas P2.

Exercice 7 :					
	P2 :	2	3	-7	Parabole $2\,(x - 3)^2 - 7$
	R :	2	3	7	
	R :	2	3	-7	

Rien sur le brouillon en ce qui concerne cet exercice. A est correct d'emblée et le lien semble fait entre le sens de P et Q et le sommet. Il est difficile de savoir ce qui a conduit Antoine à cette réussite. Pourtant, deux hypothèses paraissent plausibles : la logique des points particuliers ou un feed-back sur l'exercice précédent qui a permis une réinterprétation de la réponse donnée puisque les coordonnées du sommet avaient été affichées. Les deux derniers exercices de la séance sont sur P2 et confirment la capacité construite de répondre directement correctement.

2) Caractéristiques :

Au début de séance,

- Coordonnées de points particuliers et calculs effectués (brouillon), réussite sur P3 dans certains cas mais échec sur P2,

2) Calculs initiaux souvent faux.

Ensuite, dans le passage à R, caractéristiques de R3 pour P3 et R2 pour P2 :

- Ajustement de A dans le cas de P3. Valeurs particulières dans les réponses dans le cas de P2,
- Nombre d'exercices traités moyen (9),
- Nombre de paraboles rencontrées faible (18),
- Changement de forme après succès confirmé,
- Actions de base : repérage de points remarquables, résolution d'un système, estimation,
- Réussite avec stabilité à la fin de séance.

3) Coût : Le coût calcul de C même avec des points particuliers reste grand, le nombre moyen d'exercices en séance montre que la lenteur au début avec C est compensée par une rapidité de traitement avec R qui est de type R2 ou R3 (puisqu'il y un sens acquis ou une capacité de réponse) utilisée dans la suite.

La première stratégie d'Antoine ressemble à la stratégie ponctuelle élaborée. Il passe ensuite à la stratégie lecture/estimation. Il suit le parcourt :

C ------------->	R3 ----------->	R2 ----------->	R3
P3	P3	P2	P2
Succès			

4) Pré-test/post-test : Au pré-test aucune connaissance n'est décelée. Le post-test montre de bonnes connaissances sur tous les savoirs dans les deux formes.

5) Effet de la séance : très grand progrès complètement transféré au post-test.

C) <u>CALCUL, ECHEC, REFUGE DANS "R"</u> :

1) Fichier typique :(Jeanne, élève de terminale de niveau faible).

Jeanne traite en séance des exercices sur les formes P1 et P3. Elle commence avec P1. Face au premier exercice, qui est de la forme P1, Jeanne affiche des coordonnées entières de points et forme les équations par instanciation de x et y dans l'équation de la forme donnée ; mais elle n'arrive pas à trouver la bonne solution du système. Des principes élémentaires dans le traitement des équations ne sont pas respectés même dans le cas d'équations linéaires avec P1. D'où la réponse erronée. Reprise des calculs. Echec. Jeanne traite de cette façon trois exercices sur P1 et deux exercices sur P2. Elle se réfugie ensuite dans R. Là aussi elle échoue.

2) Caractéristiques :

Au début,
- Incapacité de résoudre un système,
- Affichage de 3 points,
- Réponses complètement incorrectes,

Ensuite,
- Jeu inorganisé avec R,
- Nombre d'exercices moyens (10),

- Nombre de paraboles rencontrées faible (20),
- Rares changements de forme,
- Tâches de base : Instanciation, Tâtonnement,
- Echec en séance.

3) Coût : les coûts calcul et connaissances relatifs à C sont nettement au delà des capacités de Jeanne. Le temps écoulé avec C semble relativement grand puisque le brouillon montre la grande déroute de Jeanne dans ces calculs. Il semble donc qu'il lui est resté peu de temps pendant lequel elle a traité cinq exercices avec R. La rapidité avec R, nous le savons est possible dans deux cas : bonne réponse directe ou simple jeu. Il s'agit ici de R1 jeu simple.

La stratégie de Jeanne ressemble à la stratégie ponctuelle brute qui après échec se transforme en tâtonnement et le parcours est décrit par le schéma suivant :

C brut ------------> R1
Echec

4) Pré-test/post-test : Au pré-test aucune connaissance n'est manifestée sur P1 et il n'y a pas de réponse aux questions portant sur P3. Au post-test on constate une seule réussite : elle concerne le signe de A.

5) Effet de la séance : Pas de progrès en séance et pourtant des connaissances sur le signe de A au post-test.

Ainsi donc, les 8 protocoles d'élèves qui relèvent de la tactique CR se répartissent eux aussi sur 3 types :

1) la stratégie CR <u>réussite avec "C", passage à "R"</u> dont le schéma est :

C brut -------------> R1
Succès

qui ne permet de traiter qu'un petit nombre d'exercices pendant la séance et est accompagnée d'un très faible progrès pré-test/post-test. La réussite au calcul ne permet pas le passage efficace à R. Cette stratégie est une stratégie ponctuelle brute qui se transforme en tâtonnement inorganisé. La réussite avec C ne suffit pas pour garantir une réussite avec R.

2) la stratégie CR <u>calcul à partir des points particuliers, passage à "R"</u>, dont le schéma est :

C -------------> R2
Succès

ou

C ------------> R3
Succès

tout en permettant de traiter un nombre moyen d'exercices et une bonne réussite pendant la séance, elle est accompagnée d'un progrès surtout sur P2 et P3. Cette stratégie est basée sur le repérage de points particuliers et leur exploitation dans des calculs puis des estimations.
Le fait d'utiliser des points particuliers pour les calculs favorise la mise en relation des caractéristiques graphiques et algébriques et permet l'apprentissage, ce qui n'est pas le cas du calcul brut.

3) la stratégie CR calcul, échec, refuge dans R dont le schéma est :

C ------------> R1
Echec

Elle permet de traiter, sans réussite en général, excepté parfois dans le cas de P2, un nombre d'exercices moyen pendant la séance et elle n'est pas accompagnée d'un progrès pré-test/post-test. Le passage de C, après échec, à R ne traduit qu'un refuge dans le simple jeu R1.

Le passage de C à R ne semble conduire à un apprentissage que par le biais de l'exploitation des points particuliers. Dans ce cas, les acquis sont complètement transférés au post-test.

L'analyse statistique, a fourni des résultats globaux sur les tactiques de transition vers R mais elle n'a pas donné des résultats concernant directement la tactique CR. Nous comparerons les résultats de l'analyse des fichiers aux résultats de l'analyse statistique à propos des stratégies de transition vers R après présentation des analyses concernant les tactiques CTR et TR.

TACTIQUE CTR

Huit fichiers relèvent de cette tactique et sont accompagnés de brouillons. L'analyse de ces fichiers laisse distinguer trois stratégies. La stratégie CTR1 évolution du calcul contrôlé par "T" à "R" rencontrée chez 5 élèves du groupe G1 c'est-à-dire travaillant sur P1 et P3, dont 4 ont connu une réussite nette et la stratégie CTR2 échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R" rencontrée chez 1 élève du groupe G2, travaillant sur P2 et P3, et dont le post-test ne montre pas un progrès, la stratégie CTR3 échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R"et lien visuel-algébrique rencontrée chez 2 élèves du groupe G2, travaillant sur P2 et P3, et ont manifesté un grand progrès au post-test. La réussite avec CTR1 dans le cas de P1, paraît normale puisqu'on peut faire l'hypothèse que le calcul, même brut, bien adapté à P1, permet un début de séance avec réussite et que, combiné ensuite avec des tracés de contrôle, il permet un passage efficace à R. La réussite avec CTR2 dans le cas de P2, après échec sur T, peut être expliquée a priori par la possibilité d'apprentissage favorisée par R, que nous avons mentionnée précédemment. Si l'on compare aux stratégies CR étudiées dans le paragraphe précédent, on peut faire l'hypothèse que la transition par T entre C et R favorise l'apprentissage en aidant l'élève à passer d'une logique du calcul à une logique du sens.

A) EVOLUTION DU CALCUL CONTROLE PAR "T", A "R" : deux fichiers sont associés à cette stratégie. Ces deux fichiers montrent deux variantes de cette stratégie qui correspondent à deux évolutions différentes dans le traitement de P3 après la réussite sur P1.

1) Fichiers typiques :

(Fichier 1 : Karine, élève de terminale de niveau moyen).

Exercice 1 :

P1:	1	-4	-3	Parabole $x^2 - 4x - 3$
C :	2	-7		
C :	1	-6		
C :	-1	2		
T :	-1	3	-2	
T :	1	-4	-3	
R :	1	-4	-3	

La résolution du système formé à partir des coordonnées affichées, engendre une erreur de calcul qui conduit Karine au premier tracé, nettement loin de la parabole donnée. Karine reprend son calcul et corrige l'erreur d'où la réponse après confirmation du tracé.

Exercice 2 :

P1:	-2	-3	-7	Parabole $-2x^2 - 3x - 7$
C :	0	-7		
C :	1	-2		
C :	-2	-9		
T :	2	-3	-7	
R :	-2	-3	-7	

L'instanciation du point (0;-7) dans la forme de l'équation conduit directement (sans expressions intermédiaires) à l'équation -7 = c qui a été réécrite c=-7 et soulignée. Début de sens peut-être pour C. B et C sont corrects et la valeur de A proposée dans le tracé résulte d'une erreur de calcul. L'erreur de signe sur A est, semble-t-il, directement corrigée au clavier parce que sur le brouillon on ne voit que A = 2. Il s'agit donc d'une réussite par le calcul mais on voit apparaître un point particulier (0;-7) dont l'intérêt semble compris. Il pourrait constituer un facteur déclenchant du sens de C.

Exercice 3 :

P1 :	-1	3	5	Parabole $-x^2 + 3x + 5$
C :	2	7		
T :	-2	10	5	
R :	-1	3	5	

Karine ne prend pas cette fois-ci de point particulier, mais C est d'emblée lu puisqu'il n'y a pas de calculs (au brouillon) justifiant les valeurs proposées de A et C. L'hypothèse sur la capacité de lecture de C déclenchée par le point particulier dans l'exercice précédent semble confirmée. B a été calculé à partir de ces valeurs et de l'équation formée à partir des coordonnées affichées. A est corrigé directement et la modification de B s'en déduit par calcul. L'exercice montre un début d'économie des calculs par lecture de C et estimation de A.

Dans les 2 exercices qui suivent et qui sont de type P1, Karine répond directement et les réponses sont correctes en ce qui concerne A et C. Des estimations de B proposées ne conduisent pas à la bonne valeur. Le passage à R est donc non efficace pour B. Après cette réussite limitée sur P1, Karine passe à P3.

Exercice 6 :

P3 :	1	4	1	Parabole $(x - 4)(x - 1)$
C :	0	4		
C :	-1	10		
C :	3	-2		
T :	2	1	1	
T :	1	1	4	
R :	1	1	4	

Karine retourne aux coordonnées et au calcul brut. Elle écrit les équations suivantes:

$$\begin{cases} A\,R\,S = 4\,; \\ A\,(-1 - R)\,(-1 - S) = 10; \\ A\,(3 - R)\,(3 - S) = -2\,; \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} A\,R\,S = 4\,; \\ A\,(1 + S + R + R\,S) = 10\,; \\ A\,(9 - 3\,S - 3\,R + R\,S) = -2\,; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A = 2 \text{ [estimé]}; \\ RS = 2\,; \\ 2(3 + S + R) = 10\,; \qquad S + R = 2\,; \end{cases}$$

D'où elle tire :

A= 2 ; R = 1 ; S = 1. D'où un premier tracé.

Il faut noter que les valeurs choisies pour R et S sont compatibles avec R+S=2 mais non avec RS = 2.

L'insuccès amène Karine à modifier A tout en poursuivant son bricolage algébrique. Elle aboutit ainsi à :

$$\begin{cases} A = 1 ; \\ RS = 4 ; \\ 1\,(5 + S + R) = 10 ; \quad S + R = 5 ; \end{cases}$$

D'où la proposition :

A = 1 ; R = 1 ; S = 4 ;

pour le deuxième tracé.

A la base de la stratégie, il y a donc, l'estimation de A, la première fois par 2, et la deuxième par 1, et la prise en compte des relations liant R et S. Cette stratégie est réutilisée dans l'exercice suivant.

Exercice 7 :

P3 :	-3	2	-3	Parabole -3 (x - 2) (x + 3)
C :	1	12		
C :	2	0		
T :	-2	2	-5	
R :	-3	2	-3	

A (1 - R)(1 - S) = 12 ; A(2 - R) (2 - S) = 0 ;

A = -2 ; [estimé] -2 (1 - R)(1 - S) = 12 ; -2 (2 - R) (2 - S) = 0 ;

A = -2 ; R = 2 ; -2 (1 - 2) (1 - S) = 12;

D'où :

A = -2 ; R = 2 ; S = -5 ; Premier tracé

Puis :

A = - 3 ;[ajusté] R = 2 ; -3(-3 - S) (-3 - R) = 0;

A= -3 ; R = 2 ; S = -3 ; Réponse.

Fin de séance avec la même stratégie.

(Fichier 2 : Alain , élève de terminale de niveau faible).

Le début de la séance qui porte sur la forme P1 est similaire à celui de Karine: Calcul avec C et contrôle avec T qui conduisent à un sens pour le coefficient C et le coefficient A.

Ensuite C est lu, A et B résultent d'estimations. Celles de A deviennent correctes après familiarisation mais celles de B restent incorrectes.

Dans la suite, avec P3, la stratégie est différente. A la base de cette stratégie, il y a, semble-t-il, un prolongement du travail effectué avec P1 : donner du sens à chacun des coefficients R et S par observation des tracés.

Exercice 5 :

P3 :	-2	5	-2	Parabole -2 (x - 5) (x + 2)
T :	-2	1	3	
T :	-2	1	4	
T :	-2	1	-4	
T :	-2	1	-2	
R :	-2	5	-2	

Cette fois-ci, pas de retour au calcul comme dans le cas de Karine. A est correct dès le début, ce qui semble être le fruit du transfert du cas de P1. Le jeu porte sur S. Un sens pour S semble construit et la symétrie entre R et S semble finalement remarquée.

L'exercice suivant confirme le sens pris par R et S.

Exercice 6:

P3 :	2	-3	1	Parabole 2 (x + 3) (x - 1)
T :	1	1	-3	
R :	2	1	-3	

L'exercice 7 en revanche, laisse des doutes sur les acquis.

Exercice 7 :

P3 :	-3	-5	-1	Parabole -3 (x + 5) (x + 1)
R :	2	1	-5	
R :	-2	-1	5	
R :	-3	1	5	

A est enfin correct mais il semble que <u>le fait que la parabole soit d'un seul côté de l'axe des y perturbe les acquis manifestés précédemment</u>. Ces acquis semblent donc encore fragiles et dépendants du contexte.

Aux 2 derniers exercices de la séance qui sont de la forme P1, Alain répond directement sans pouvoir obtenir la valeur de B.

2) Caractéristiques :

Au début,

- Nombre de points affichés décroissant avec le temps,
- Passages papier/machine fréquents,

Ensuite,

- Jeu organisé,
- Nombre d'exercices traités moyen (8),
- Nombre de paraboles rencontrées faible (18),
- Changement de forme après deux échecs successifs sur une même forme ou une réussite confirmée sur une même forme,
- Tâches de base : Instanciation, Résolution d'un système, Tracer, Comparer, Estimation,
- Réussite surtout en fin de séance.

3) Coût : on voit clairement le coût élevé de C au début de séance mais qui ne cesse de diminuer avec l'évolution dans l'utilisation de C et sa combinaison avec T. Ce coût parait maximal avec Karine qui ne traite que 7 exercices en séance. Le transfert de P1 à P3, qui a été remarqué dans la séance d'Alain, semble expliquer la réduction du coût en séance qui se manifeste par un nombre moyen d'exercices : 9.

La stratégie de Karine est considérée dans notre analyse a priori comme stratégie de séance évolutive. Elle peut être traduite par le schéma suivant :

C1T	------->	R2	------->	C1T	------->	R3
P1		P1		P3		P3
Succès						

La stratégie d'Alain elle aussi est considérée dans notre analyse a priori comme stratégie de séance évolutive et son parcours est :

C1T	------->	R2	------->	T	------->	R3
P1		P1		P3		P3
		Succès				

4) Pré-test/post-test : Pour Karine et Alain, au pré-test aucune connaissance n'est manifestée sur P3 mais on note des connaissances sur le signe de A, sur Bnul et Cnul, dans la forme P1. Le post-test est complètement correct.

5) Effet de la séance : une réussite en séance et un transfert complet au post-test qui se traduit par un grand progrès pré-test/post-test. Les bonnes performances d'Alain au post-test sur P3 n'étaient pas attendues, vu les résultats de la séance.

B) ECHEC AVEC C , ECHEC AVEC "T", REFUGE DANS "R" : cette tactique a été utilisée avec P2 et P3.

1) Fichiers typiques : (Fichier 1 et Fichier 2 : Malek et Isabelle, 2 élèves de terminale de niveau moyen. Les copies d'écran correspondant aux exercices qui ont servi pour l'illustration du fichier d'Isabelle sont données dans l'annexe B)

Pour les exercices du début, même démarche pour les deux : choix de P2, affichage de 3 points, écriture des équations non linéaires, transformation répétée de ces équations, blocage, tracés et réponses : Echec. Changement de forme : Echec.

R semble alors intervenir comme un refuge. Mais après ce refuge, les deux stratégies sont différentes.

Malek n'arrive pas à répondre correctement. Il termine, avec une stabilité sur le signe de A, une séance de 7 exercices comportant 4 passages d'une forme à l'autre.

Pour Isabelle, la situation change à partir de l'exercice 5 qui correspond, pour elle, au troisième changement de forme :

Exercice 5 :					
	P3 :	-2	5	5	parabole -2 (x - 5) (x - 5)
	R :	2	1	3	
	R :	-3	3	4	
	R :	-1	4	-4	

Au brouillon, rien ne semble concerner l'exercice. Le jeu est inorganisé mais le signe de A est correct dans les deux dernières réponses.

Exercice 6 :					
	P3 :	3	3	-2	Parabole 3 (x - 3) (x + 2)
	R :	2	3	2	
	R :	1	3	-2	
	R :	3	3	-2	

L'expression "A (x - R) (x - S) = 0" suivie de "x = R ou x = S" qu'on trouve au brouillon peut aider à comprendre. Il semble qu'elle ait été écrite après l'exercice 5. Il semble aussi qu'elle constitue le résultat du feed-back relatif à la solution donnée par la machine pour cet exercice. Ainsi l'erreur sur le signe de S est vite corrigée à la seconde proposition, puis A est, lui aussi, correctement ajusté.

Cette réussite se confirme dans l'exercice 7. Elle est aussi suivie par la réussite avec P2 dans chacun des deux derniers exercices 8 et 9.

Exercice 8 :				
P2 :	-2	2	3	Parabole $-2\,(x-2)^2+3$
R :	-3	2	-5	
R :	-2	2	0	
R :	-2	2	3	

Cette fois-ci, visiblement il n'y a pas retour à l'équation comme dans l'exercice précédent. Un changement de stratégie semble se produire. Isabelle essaye, en effet, de faire jouer les coordonnées de points particuliers (2 ; 3) et (0 ; -5) en les faisant figurer dans les valeurs proposées dans les réponses. C'est peut être l'effet du résultat concernant l'interprétation de R et S trouvée dans l'exercice précédent.

Exercice 9 :				
P2 :	1	-2	-5	Parabole $1\,(x+2)^2-5$
R :	-1	-2	-5	
R :	1	-2	-5	

2) Caractéristiques :

Au début,

- 3 points affichés. Calcul interrompu. Mauvaises réponses,
- Tracés avec jeu inorganisé. Mauvaises réponses,

Ensuite,

- Jeu organisé,
- Changement de forme (tous les 2 exercices),
- Nombre d'exercices traités moyen,
- La première réussite est accompagnée d'un feed-back graphique et d'un retour à l'équation,
- Tâches de base : Instanciation, Tracé, Tâtonnement ou Comparaison,
- Réussite en fin de séance ou échec,

3) Coût : Dans le cas de Malek, le nombre d'exercices, faible en séance, revient en partie au coût élevé du calcul brut avec C, en début de séance, mais il peut être aussi attribué au blocage avec T et R. Dans le cas d'Isabelle, le nombre moyen d'exercices semble tenir au déblocage et à l'acquisition du sens favorisée par la liaison écran-papier qui apparaît à l'exercice 5.

La stratégie de Malek ne figure pas parmi les stratégies de notre analyse a priori et son parcours peut être schématisé par :

C1T	------->	C1T	------->	T	------->	R3
P2		P3		P2,3		P2,3

La stratégie d'Isabelle ne figure pas, elle non plus, parmi les stratégies de notre analyse a priori et son schéma est le suivant :

C1T	--->	C1T	--->	T	--->	R2	--->	R3	--->	R2	--->	R3
P2		P3		P2		P3		P3		P2		P2
								Succès				
								Equation				

4) Pré-test/post-test : Pour Malek, Au pré-test rien sur P2, rien sur P3 et le post-test ne montre que des connaissances sur le signe de A.

Pour Isabelle, au pré-test rien sur P2, rien sur P3. Le post-test d'Isabelle est complètement correct sauf pour la question consistant à associer à une expression algébrique de la forme P3 une parabole parmi plusieurs données par leurs graphes, ce qui est inattendu.

5) Effet de la séance : bonne réussite mais transfert incomplet au post-test ou progrès faible.

Nous venons de voir que les 8 protocoles d'élèves de la tactique CTR se répartissent sur 2 stratégies et que :

1) la stratégie CTR évolution du calcul contrôlé par "T" à "R" permet de traiter un nombre moyen d'exercices pendant la séance avec réussite et est accompagnée d'un très grand progrès pré-test/post-test. Cette stratégie est basée sur l'instanciation dans l'équation, la résolution du système, la comparaison des tracés et l'estimation, puis le passage à R, en cas de succès.

2) la stratégie CTR échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R", tout en permettant de traiter un nombre moyen d'exercices est accompagnée d'un échec en séance et d'un faible progrès pré-test/post-test.

3) la stratégie CTR échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R" en liant les changements visuels à des caractéristiques algébriques est accompagnée d'une bonne réussite en fin de séance et d'un progrès sur P2 et P3. Cette stratégie est basée sur l'instanciation dans l'équation, la comparaison des tracés et l'estimation.

TACTIQUE TR

Deux fichiers, sans brouillon, représentent cette tactique. L'un relève d'une évolution de "T" à "R" accompagnée d'une réussite et d'un progrès et l'autre de échec avec "T", refuge dans "R" qui ne permet pas de progrès.

A) EVOLUTION DE "T" A "R" :

1) Fichier typique : (Igor, élève de terminale de niveau faible. Les copies d'écran correspondant aux exercices qui ont servi pour l'illustration de ce fichier se trouvent dans l'annexe B).

Igor est un élève du groupe G2, il traite donc des exercices sur P2 et P3, il commence avec P3.

Exercice 1 :

P3 :	1	1	3	Parabole (x - 1) (x - 3)
T :	2	-10	12	
T :	1	-5	6	
T :	1	-2	3	
T :	1	-4	3	
R :	11	0	0	

Les valeurs des coefficients au premier tracé semblent être choisies au hasard. Le tracé qui correspond (sur l'écran) est en fait réduit à quatre points. La forme habituelle (partie de la parabole de part et d'autre du sommet) n'apparaît pas à l'écran. Le choix des valeurs proposées pour le second tracé, qui sont les moitiés de celles proposées pour le premier semble viser une parabole qui apparaisse à l'écran. Le sommet du tracé n'apparaît toujours pas. De nouveau, Igor réduit les valeurs proposées. Le quatrième tracé semble résulter d'un certain sens donné aux coefficients. La valeur de A dans la réponse semble résulter d'une erreur de frappe commise en introduisant 1 pour A, 1 pour R et 3 pour S. Une prise en compte tardive de l'erreur semble conduire à frapper des 0 comme renonciation à la réponse. Le signe de A est toujours correct. Quoi qu'il en soit la bonne réponse s'est affichée à l'écran à la fin de l'exercice.

Exercice 2 :

P3 :	3	-5	1	Parabole 3 (x + 5) (x - 1)
T :	6	24	-30	
R :	6	-5	1	
R :	5	-5	1	
R :	4	-5	1	

Il semble qu'au début de l'exercice et comme résultat du feed-back sur l'exercice précédent, Igor connaisse déjà le sens de R et S et ayant donné comme valeur à A : 6, il ait ainsi comme équation de la parabole $6\ (x + 5)\ (x - 1) = 6\ x^2 + 24\ x - 30$. Les coefficients R et S de la forme P3 semblent donc confondus avec les coefficients B et C de la forme P1. Le message "tracé hors écran" est envoyé par la machine. Il y a prise en compte de l'erreur et R et S sont corrects : première réponse. Le jeu sur A, bien que dans le bon sens, n'aboutit pas en revanche.

De l'exercice 3 à l'exercice 6, la forme utilisée est toujours P3, les réponses sont directes et une familiarisation construite avec A amène parfois à la réussite en un seul coup. A l'exercice 7, il y a passage à la forme P2.

Exercice 7 :				
P2 :	-3	2	7	Parabole $-3\,(x - 2)^2 + 7$
R :	-3	3	0	
R :	-3	3	4	
R :	-3	3	7	

Il y a, semble-t-il, transfert sur A. R et S se reconstruisent vite. les abscisses x1 et x2 des points de la parabole sur l'axe des abscisses sont telles que $0<x1<0,5$ et $3<x2<3,5$. Les valeurs 3 et 0 proviennent, semble-t-il, de lectures graphiques imprécises de ces abscisses. Igor confond donc le sens de P et Q avec celui de R et S. A est lui, correct dès le début. La particularité de la valeur nulle proposée pour Q ne semble pas être remarquée ni associée à l'ordonnée nulle du sommet du tracé correspondant fourni par la machine. La deuxième réponse proposée par Igor conserve en effet les valeurs précédentes de A et P et donne à Q la valeur 4. Mais le second feed-back semble permettre à Igor de trouver l'effet de Q. Le message affiché lors du traitement de la réponse finale confirme Igor dans son idée.

L'exercice 8 est de la forme P2.

Exercice 8 :				
P2 :	2	-1	4	Parabole $2\,(x + 1)^2 + 4$
R :	1	1	4	
R :	3	-1	4	
R :	2	-1	4	

Q est correct d'emblée. le signe de A aussi. Le jeu porte sur la taille exacte de A et le signe de P. Des propositions dans le bon ordre pour A aboutissent à la bonne valeur à la fin de l'exercice. Le signe de P est vite corrigé.

Exercice 9 :				
P2 :	-3	1	6	Parabole $-3\,(x - 1)^2 + 6$
R :	-2	1	6	
R :	-3	1	6	

Igor ajuste A, P et Q étant connus dès le début. La réponse fournie au second coup est correcte.

Ensuite, Igor traite 4 exercices, deux de chaque type. Dans les 2 cas, la réponse est correcte au premier ou au second coup.

2) Caractéristiques :

Au début,

- Tracés avec jeu inorganisé et mauvaises réponses puis organisé dans la suite et réponses bonnes globalement ou partiellement,

Ensuite,

- Jeu organisé avec R et réussite,
- Changement de forme après réussite confirmée,
- Nombre d'exercices traités grand (13),
- nombre de paraboles rencontrées moyen (35),
- Tâches de base : Tracer, Comparer, Conjecturer, Valider, Estimer.

3) Coût : le coût calcul est nul. La familiarisation remarquable avec les ouvertures semble accélérer les estimations et semble permettre un passage à R3 puis à R2 avec un coût optimisé qui permet de traiter un grand nombre d'exercices.

La stratégie d'Igor est une stratégie d'essai/erreur contrôlée par T et son schéma est:

T	------>	R3	------>	R2	------>	R3
P3		P3		P2		P2
Succès						

4) Pré-test/post-test : Au pré-test Igor a répondu correctement à la plupart des questions sur A mais n'a montré aucune connaissance sur P et Q. Le post-test est complètement correct.

5) Effet de la séance : grande réussite en séance complètement transférée au post-test.

B) <u>ECHEC AVEC T , REFUGE DANS "R"</u> :

1) Fichier typique : celui de Michel, qui a été présenté dans la partie II du chapitre présent.

2) Caractéristiques :

Au début

- Tracés avec jeu inorganisé. Mauvaises réponses,

Ensuite,

- Jeu inorganisé avec R et mauvaises réponses,
- Changements de forme fréquents,
- Nombre d'exercices traités grand (13),
- Nombre de paraboles rencontrées très grand (54),

- Tâches de base : Tracer, Comparer, Tâtonner.

3) Coût : le grand nombre d'exercices sans progression en séance montre que le passage à R est du type passage au jeu simple.

La stratégie de Michel est une stratégie d'essai/erreur contrôlée par T dont le schéma est:

T ---------> R1
Echec

4) Pré-test/post-test : Au pré-test, Michel ne donne pas de réponses. Le post-test ne montre que des connaissances sur le signe de A.

5) Effet de la séance : échec en séance et réussite limitée au signe de A au post-test.

Nous venons de voir que les 2 protocoles d'élèves de la tactique TR se répartissent sur 2 stratégies :

1) la stratégie TR évolutive qui permet de traiter efficacement un grand nombre d'exercices pendant la séance et est accompagnée d'un grand progrès pré-test/post-test. Cette stratégie est basée sur la comparaison des tracés, l'élaboration et le test de conjectures, l'estimation.

2) la stratégie TR échec avec "T", refuge dans "R" qui tout en permettant de traiter un grand nombre d'exercices ne permet pas la réussite en séance et ne s'accompagne pas d'un progrès pré-test/post-test. Cette stratégie est basée sur la comparaison des tracés et le tâtonnement.

III) SYNTHESE

L'analyse des cas typiques nous a conduit directement à des résultats sur les stratégies effectives, et en remontant aux tactiques, des résultats sur celles-ci. Ces derniers résultats ont permis d'obtenir des réponses aux questions liées directement à ces tactiques et à la question de l'adaptation au jeu. Ces cas typiques ont aussi permis de mieux connaître les comportements des élèves et de préparer des éléments d'analyse pour l'étude des processus d'évolution. En particulier l'analyse a permis de mieux cerner le rôle particulier de P3 dans la réussite. Latéralement, l'analyse des cas typiques a fourni des éclaircissements sur les relations séance/progrès, nombre de paraboles rencontrées en séance / progrès et niveau de l'élève / activité.
Rappelons tout d'abord, les stratégies identifiées via l'analyse des fichiers relatifs aux tactiques essentielles et donnons leurs principales caractéristiques.

a) TACTIQUE R :

1) la stratégie R1 jeu simple, d'activité grande mais sans réussite en séance, est accompagnée d'un très faible progrès pré-test/post-test.

2) la stratégie R2 jeu avec apprentissage, d'activité moyenne, avec réussite en séance, est accompagnée d'un progrès surtout sur P3.

3) la stratégie R3 avec capacité de réponse, de grande activité avec réussite sur P2 et P3 pendant la séance et de très bonnes performances au post-test et au pré-test.

b) TACTIQUE T :

La tactique T et sa stratégie unique qui apparaît en fait comme une version plus prudente de la stratégie R1 jeu simple. Elle permet de traiter beaucoup d'exercices mais elle conduit à un progrès très faible.

c) TACTIQUE CR :

1) la stratégie CR1 réussite avec "C", passage à "R" dont le schéma est :

C brut -------------> R1
Succès

elle se caractérise par une faible activité et une réussite moyenne en séance, et est accompagnée de très faible progrès pré-test/post-test.

2) la stratégie CR2 calcul à partir des points particuliers, passage à "R" dont le schéma est :

C -------------> R2
Succès

ou

C -------------> R3
Succès

tout en permettant une activité moyenne et une bonne réussite pendant la séance, elle est accompagnée d'un progrès surtout sur P2 et P3.

3) la stratégie CR3 calcul, échec, refuge dans "R" dont le schéma est

C -------------> R1
Echec

d'activité moyenne mais sans réussite en général en séance, elle n'est pas accompagnée d'un progrès pré-test/post-test.

d) TACTIQUE CTR :

1) la stratégie CTR1 évolution du calcul contrôlé par "T" à "R", d'activité moyenne avec réussite en séance est accompagnée de très grand progrès pré-test/ post-test.

2) la stratégie CTR2 échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R", d'activité moyenne est accompagnée d'un échec en séance et d'un faible progrès pré-test/post-test.

3) la stratégie CTR3 échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R" en liant les changements visuels à des caractéristiques algébriques est accompagnée d'une bonne réussite en fin de séance et d'un progrès sur P2 et P3.

e) TACTIQUE TR :

1) la stratégie TR1 évolutive, de grande activité avec réussite en séance et grand progrès pré-test/post-test.

2) la stratégie TR2 échec avec "T", refuge dans "R", de grande activité sans réussite en séance, elle n'est pas accompagnée d'un progrès pré-test/post-test.

Revenons ensuite aux résultats de l'analyse statistique à propos des tactiques et comparons-les avec les résultats de l'analyse des fichiers :

a) TACTIQUE R :

L'analyse statistique n'a pas montré de façon nette une association R - faible progrès. L'analyse des fichiers et en particulier la mise en évidence de la stratégie R2 qui conduit à un progrès net constitue une explication : avec R un apprentissage est possible, R ne conduit pas nécessairement à un faible progrès.

b) TACTIQUE T :

La stratégie unique simple jeu identifiée dans les fichiers relatifs à cette tactique confirme la grande activité et le faible progrès mis en évidence par l'analyse statistique.

c) TACTIQUE N :

Rappelons que la tactique N est une tactique de passage négatif à R, passage non accompagné d'une réussite en fin de séance. L'analyse statistique montre une implication de N vers faible progrès mais ne désigne pas N comme nécessairement liée à de mauvais résultats en séance. L'analyse des fichiers montre que N regroupe les stratégies CR1 (réussite avec C, échec avec R), CR3 (échec avec C, refuge dans R), CTR2 (échec avec C, échec avec T, refuge dans R) et TR2 (échec avec T, refuge dans R). CR1(3) est accompagnée d'une réussite avec C en début de séance mais d'un échec dans le passage à R. Ce qui a été montré en analyse statistique concernant une séance qui n'est pas globalement (séance comprise) mauvaise est donc justifié.

d) TACTIQUE P :

C'est une tactique de transition positive vers R se terminant par un succès. P regroupe effectivement les stratégies d'activité moyenne et de grand progrès CR2 (calcul à partir des points particuliers puis R), CTR1 (évolution du calcul contrôlé par T à R), CTR2 (échec avec C, échec avec T puis passage avec réussite à R) et TR1 (évolution de T à R) ce qui confirme les résultats concernant l'activité moyenne et le grand progrès associés à P.

Remontons enfin des stratégies identifiées par l'analyse des fichiers aux questions initiales.

1) ADAPTATION AU JEU : Nous avons défini l'adaptation au jeu comme étant le traitement de l'exercice comme un jeu réfléchi. Les stratégies qui y correspondent sont : CR2 (calcul à partir des points particuliers, passage à R), R2 (jeu avec apprentissage), R3 (capacité de réponse directe), CTR1 (évolution du calcul contrôlé par T à R), CTR3 (échec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R" et liaison visuel-algébrique) et TR1 (évolution de T vers R). Toutes ces stratégies conduisent à un progrès net ce qui confirme le résultat de l'analyse statistique qui montre que l'adaptation au jeu favorise l'apprentissage.

2) NIVEAU ET CLASSE : l'analyse des fichiers représentatifs des stratégies identifiées montre nettement que niveau et classe ne sont pas des variables significatives par rapport à la réussite, l'activité et le progrès, ce qui confirme les résultats de l'analyse statistique à propos de la réussite et du progrès et montre que les signes de différences d'activité par rapport au niveau ne sont pas réellement significatifs.

3) SEANCE ET PROGRES : tous les cas rencontrés montrent qu'il y a un transfert complet des acquis de la séance au post-test. Certains fichiers (Christian et Alain) montrent, cependant, que le post-test peut être meilleur sur P3, ce qui semble confirmer le résultat déjà trouvé par l'analyse statistique. En revanche, le retour aux fichiers ne permet pas de confirmer l'hypothèse de simplicité des connaissances sur P3 par rapport aux connaissances correspondants sur P1. Par rapport à P2 et P3, il semble que les feed-back perceptifs P3 soient plus parlants que ceux relatifs à P2.

3) ACTIVITE : les fichiers montrent nettement que les bons résultats et le progrès sont plutôt accompagnés d'une activité moyenne.

4) NOMBRE DE PARABOLES : les fichiers ne montrent pas que progrès et réussite en séance soient en relation directe avec le nombre de paraboles rencontrées en séance. Les indications rencontrées en analyse statistique que nous avons interprétées comme signe d'une relation existant dans le cas de P3, paraissent non confirmées.

IV) CONCLUSION

La revue des protocoles des élèves après l'analyse statistique nous a permis d'identifier des stratégies différentes appartenant à une même tactique, de déterminer leurs caractéristiques, de montrer leur fonctionnement et d'émettre des hypothèses sur les mécanismes d'apprentissage.

Le retour aux fichiers nous a permis de confirmer des résultats déjà trouvés dans l'analyse statistique, de lever les doutes subsistant sur certains points dans d'autres, et d'expliquer certains phénomènes mis en évidence par cette analyse. Au niveau des confirmations, l'analyse des fichiers a montré que :

1) Des stratégies sont mieux adaptées à la réussite que d'autres.

2) Classe et niveau ne sont pas des facteurs dans la réussite.

3) L'adaptation au jeu conduit, systématiquement, à un tranfert de l'apprentissage à l'environnement papier/crayon.

4) La conformité du résultat du post-test au résultat en séance. Mais, dans le cas de P3 comme l'ont montré certains fichiers, le résultat au post-test est meilleur que celui prévu au vu de la séance. Cependant, nous n'avons pas pu trouver des nouvelles explications de ce phénomène.

A propos des doutes qu'elle a levés, nous citons :

1) L'explication de l'absence de liaison : tactique R - progrès faible par la possibilité d'apprentissage avec R, mise en évidence par la stratégie R2, et l'absence de lien N - faible progrès par la possibilité de succès antérieur au passage à R comme l'a montré la stratégie CR1.

2) La mise en évidence de la non significativité des signes que nous avions interprétés comme signes de relation niveau-activité.

Des questions restent pourtant sans réponses. Au delà et indépendamment des stratégies identifiées, n'y a-t-il pas de "chemins privilégiés" de réussite ? L'adaptation au jeu, dans le sens profond du mot, le passage d'une forme de paraboles à une autre et le transfert des acquis d'une forme à une autre, ne sont-ils pas des facteurs qui expliquent le progrès ?

Dans l'analyse des fichiers nous avons rencontré des comportements trans-stratégiques remarquables par rapport à la réussite, nous les avons mentionnés lors de l'analyse et nous les reprenons dans le chapitre suivant dans lequel nous essayons d'identifier des processus privilégiés d'apprentissage et de progrès.

CHAPITRE V - PARTIE V

SCHEMAS ET CONDITIONS DE PROGRESSION

SCHEMAS ET CONDITIONS DE PROGRESSION

I) SCHEMAS DE PROGRESSION

La revue des protocoles nous a permis d'identifier des stratégies différentes derrière chacune des tactiques identifiées dans notre analyse a priori. Elle nous a permis ainsi de mieux interpréter les résultats de l'analyse statistique automatique. Mais elle nous a conduit aussi à de nouvelles questions concernant les dynamiques d'évolution.

Les protocoles montrent en effet des cas d'élèves qui progressent nettement en cours de séance, d'autres qui progressent moins et certains, enfin, qui ne progressent pas du tout. Dans les cas de progression, on voit apparaître des phénomènes de sauts qualitatifs relativement nets et on se demande si ces protocoles ne permettent pas de repérer certains schémas de progression indépendamment de la stratégie suivie ? Ne permettent-ils pas d'identifier des facteurs liés à ces schémas ? Ne pourrait-on donc pas mettre en évidence, à partir des protocoles, des régularités dans les processus d'évolution qui transcendent telle ou telle stratégie particulière ?

Pour essayer de répondre à cette question, nous avons tout d'abord comparé les parcours des différents élèves qui ont beaucoup progressé en cours de séance. Progression identifiée par le fait que, sur chaque forme traitée, il apparaît clairement une réussite stable en fin de séance. Ceci nous a permis d'identifier des situations identiques qui semblent déclencher une réussite et des séquences précédant cette réussite qui semblent refléter des comportements analogues. Ces situations et séquences identifiées ont été ensuite recherchées systématiquement dans les protocoles des autres élèves pour essayer de déterminer dans quelle mesure elles produisaient systématiquement les mêmes effets positifs.

Plus précisément, les protocoles de nette progression montrent que :

- Pour Antoine, Igor et Olivier, la rencontre d'une parabole particulière semble être un facteur déclenchant de la progression,
- Pour Antoine et Isabelle, c'est le repérage de points remarquables de la parabole qui semble favoriser la progression,
- Pour Antoine, Igor et Isabelle, le passage par P3 et la réussite sur P3 semblent avoir un effet favorable à la réussite sur la forme P2.

La rencontre d'une parabole particulière, le repérage de points remarquables de la parabole, le passage par la forme P3 semblent donc, sous certaines conditions, jouer un rôle dans la réussite pendant la séance.

Dans la suite, après avoir précisé ce que nous entendons par "parabole particulière", par "repérage des points remarquables", nous identifierons des séquences associées à leur effet positif avant de nous poser la question de savoir si cet effet est systématique.

I-1) LA RENCONTRE D'UNE PARABOLE PARTICULIERE

Une parabole particulière est considérée comme telle si, un au moins des coefficients de son équation distincts de A est nul ou, dans le cas de P3, si R et S sont égaux.

Une parabole P1 est donc "particulière" si elle passe par l'origine ou si son sommet est sur Oy. Une parabole P2 est "particulière" si son sommet est sur Ox ou Oy. Une parabole P3 est "particulière" si elle passe par l'origine ou si son sommet est sur Ox. Du point de vue graphique, une parabole particulière, est donc nécessairement une parabole qui passe par l'origine ou possède un sommet sur l'un des axes. Or l'origine et les axes sont des éléments de référence remarquables dans le plan et le sommet est le point d'une parabole qui, visuellement, est le plus remarquable. Une parabole particulière correspond donc à la fois à une situation graphique remarquable et à une situation algébrique remarquable.
En présence d'une parabole particulière, on peut supposer que l'effet perceptif de la particularité graphique ou algébrique peut attirer l'attention de l'élève sur le sens possible de cette particularité, tout en mettant en jeu au niveau de l'interprétation des sous-connaissances atomiques plus élémentaires que celles visées par l'articulation globale, donc constituer en quelque sorte un tremplin pour cette dernière.
Soulignons que la rencontre d'une parabole particulière en séance peut se produire lorsque la parabole tracée, dont il s'agit de trouver l'équation, l'est ou lorsque la parabole proposée pour un tracé ou une réponse l'est. Dans le premier cas l'aspect graphique est apparent tout au long de la séance tandis que l'aspect algébrique, s'il n'est pas reconnu par l'élève, n'apparaît qu'à la fin de l'exercice. Dans le second cas c'est l'aspect algébrique qui est évoqué par la proposition, et l'aspect graphique apparaît tout de suite. Dans le premier cas la situation est "durable", dans le second cas elle est "momentanée". En revanche, le conflit par rapport aux attentes peut donner lieu à une situation singulière momentanée potentiellement plus forte au niveau du déclenchement du sens.

La rencontre d'une parabole particulière peut avoir un effet positif instantané (réussite à l'exercice où elle se produit), ou un effet positif à retardement (effet qui apparaît plus tard en séance par feed-back par exemple). La réussite peut se produire sur un coefficient et se propager aux autres coefficients de la même forme ou non. La réussite à une forme peut se transférer à l'autre forme ou non. L'effet peut être différent selon que la parabole particulière est donnée ou proposée. Bien entendu, une situation particulière peut aussi rester sans aucun effet. Elle peut même rester inaperçue en tant que telle.

I-2) LE REPERAGE DE POINTS REMARQUABLES

Il consiste à repérer les points remarquables (sommet de la parabole et points sur les axes) et à les réinvestir dans la recherche de l'équation de la parabole. L'exploitation de ces points est graphique (exploitation exclusivement visuelle) ou algébrique (exploitation des coordonnées) ou graphico-algébrique. Selon la parabole, le nombre de ces points varie entre 1 et 4. Puisqu'il est impossible d'identifier l'exploitation graphique, nous nous limitons aux deux autres cas pour lesquels l'identification est possible par la détection d'utilisation des coordonnées. L'exploitation peut-être directe : ces coordonnées apparaissent comme valeurs des coefficients proposées dans des tracés ou des réponses. Elle peut-être indirecte : ces coordonnées interviennent en résolvant un système d'équations, ou simplement en instanciant ces coordonnées dans l'équation. Il peut y avoir également un mélange des deux. Soulignons que cette stratégie de repérage peut être mise en oeuvre dès le début de la séance comme elle peut résulter de l'évolution accidentelle ou réfléchie d'une stratégie plus élémentaire. Elle intervient en particulier dans les stratégies ponctuelles élaborées.

Certains coefficients étant liés aux coordonnées des points remarquables, la stratégie qui consiste à repérer et exploiter les points remarquables peut conduire à une réussite partielle ou globale et déclencher une compréhension du sens de ces coefficients.

I-3) LE PASSAGE PAR P3

P3 est apparemment la forme la plus facile des trois. Une réussite sur P3 et un sens trouvé pour R et S peuvent conduire, semble-t-il, à une reprise efficace de la question dans le cas P1 et plus probablement dans le cas de P2. L'effet du passage par P3 sur la séance peut dépendre de la position dans la séance de ce passage par rapport à l'autre forme. L'effet peut-être en particulier différent si P3 est traité au début ou en fin de séance.

I-4) EXEMPLES

Nous allons maintenant donner des exemples de situations rencontrées en séance par certains élèves, pour chacun de ces trois phénomènes.

a) <u>LES PARABOLES PARTICULIERES</u>

Qui rencontre de telles situations ? Quel type de parabole particulière ? La rencontre joue-t-elle un rôle déclencheur ? Est-ce automatique ou sous certaines conditions seulement, et quelles hypothèses peut-on alors faire ?

<u>Olivier</u> :

Après un exercice sur P3 et trois exercices sur P1 qui sont restés sans réussite Olivier rencontre une situation particulière :

Exercice 5 :

P1 :	3	1	0	Parabole $3x^2 + x$
C :	0	0		
T :	2	-2	0	
C :	1	4		
T :	3	1	0	
R :	3	1	0	

Il s'agit donc d'une situation particulière donnée.
Le fait que la courbe passe par l'origine semble jouer ici le rôle de facteur déclenchant pour l'interprétation de C. Olivier demande l'affichage de (0;0) et ensuite, dans les deux tracés demandés, la valeur de C est correcte. Olivier a ensuite exploité les coordonnées affichées (1,4) en écrivant sur son brouillon $y = A x^2 + B x$ puis $4 = A (1)^2 + B (1)$ puis $4=3+B$. Il semble qu'il ait estimé A à 3. Il teste ceci par un tracé et obtient sa première réussite.

Dans les exercices sur P1 qui suivent, C est toujours correct, A le devient à la fin et la réussite sur B reste plus aléatoire.

La situation particulière exploitée algébriquement a été accompagnée d'une réussite partielle (sur C) qui reste stable sur tous les exercices qui suivent et d'une réussite globale (sur P1) pour l'exercice considéré.

Xavier :

Après deux exercices sans réussite sur P1, Xavier rencontre une parabole particulière:

Exercice 7 :				
P1 :	-3	0	-9	Parabole $-3\ x^2 - 9$
R :	-2	7	-9	
R :	-1	0	-9	
R :	-3	0	-9	

Il s'agit ici encore d'une situation particulière donnée.

Le jeu ciblé sur C de l'exercice précédent semble aboutir. B est corrigé dès le second coup. La bonne taille de A est donnée. la réponse est correcte. Première réussite.

Dans les trois exercices suivants, Xavier continue avec le type P1. Dans les trois cas, C est d'emblée bon, le signe de A aussi, mais B est toujours incorrect. La taille de A est trouvée une fois à la fin d'un exercice. On voit donc une confirmation du sens acquis à propos de C et A et une certaine familiarité construite avec la taille de A.

La seule fois dans la séance où B est correct résulte de nouveau de la reconnaissance d'une situation particulière : le sommet est sur l'axe des ordonnées. Mais cette situation particulière ne conduit qu'à une réussite locale sur B. Ainsi la rencontre d'une situation particulière produit chez Xavier un effet stable pour C, un effet local pour B, ce qui est en fait normal, le cas général s'inférant plus difficilement du cas particulier.

Antoine :

Exercice 2 :				
P3:	-2	4	0	Parabole -2 (x - 4) (x)
C :	2	8		
C :	0	0		
C :	4	0		
R :	-2	0	4	

La parabole tracée passe par l'origine. Cette situation réduit le nombre de points qualifiés de particuliers à 3.

Elle conduit Antoine à ce système:

$$\begin{cases} a\,(2 - r)\,(2 - s) = 8\,; \\ a\,(0 - r)\,(0 - s) = 0\,; \\ a\,(4 - r)\,(4 - s) = 0\,; \end{cases}$$

et ensuite :

$r = 0$ ou $s = 0$; $r = 4$ ou $s = 4$; $a\,(2 - 0)\,(2 - 4) = 8$;
$r = 0$; $s = 4$; $a = -2$; et la bonne réponse.

On se demande, vu le traitement de l'exercice précédent (cf. fichier d'Antoine au chapitre précédent) si cette réussite aurait pu se produire si la parabole rencontrée n'avait pas été particulière. L'occasion, bien saisie, semble conduire Antoine au sens de R et S. Les 3 exercices suivants, qui sont réussis dès la première réponse directe ou la deuxième, le confirment.

Là aussi l'exploitation algébrique de la particularité semble donner naissance à une réussite globale et durable. Mais cette réussite, déclenchée par une parabole particulière n'est pas automatique, les fichiers de Fabien, Jeanne et Géraldine le prouvent.

Fabien :

Exercice 2:				
P1 :	-2	-9	0	Parabole $-2x^2 - 9x$
R :	6	2	3	
R :	2	5	-1	
R :	-3	-1	2	

Echec global sur l'exercice. La situation particulière rencontrée ne produit d'effet apparent, ni sur l'exercice, ni sur les exercices qui suivent (il n'y a ni effet immédiat ni effet à retardement).

Géraldine :

Géraldine, qui utilise uniquement la tactique R, rencontre à 3 moments différents de la séance des paraboles particulières :

Exercice 2 :			
P2 :	-3	0	-4

Exercice 6 :			
P3 :	2	4	4

Exercice 11 :			
P3 :	1	-3	0

Aucune réussite n'en résulte.

Jeanne :

Lorsque Jeanne, qui d'habitude utilise une stratégie ponctuelle brute, rencontre au deuxième exercice la parabole

P2 : 2 0 0

elle donne directement sans faire de calculs comme réponse :

1 0 0

puis

2 0 0

et réussit, mais elle échoue sur les autres exercices. La situation semble-t-il est reconnue comme parabole de la forme A x^2 mais pas comme cas particulier de P2, plutôt comme cas "exceptionnel". Elle ne semble pas apporter du nouveau au problème : aux exercices suivants, Jeanne retourne à son ancienne stratégie ponctuelle.

On est ici dans le cas d'une situation particulière trop simple donc "trop loin" de la forme générale étudiée P2 pour permettre un transfert. On peut penser que, normalement, cette situation accompagnée d'une réussite locale aura plus tendance à rester sans effet global.

Le phénomène d'effet positif retardé semble apparaître dans le fichier d'Isabelle.

Isabelle :

Apparemment, Isabelle qui relève des coordonnées de 3 points et se lance dans des calculs pour trouver les coefficients, n'a pas exploité la particularité algébrique de la parabole : 3(x + 4) x particulière donnée à l'exercice 2, premier exercice sur P3. La situation particulière est restée sans effet immédiat.

Exercice 5 :

P3 :	-2	5	5	parabole -2 (x - 5) (x - 5)
R :	2	1	3	
R :	-3	3	4	
R :	-1	4	-4	

R semble être le refuge. Au brouillon rien ne semble concerner l'exercice. Jeu inorganisé. Correction du signe de A. La situation particulière rencontrée est apparemment, encore une fois, sans effet.

Exercice 6 :

P3 :	3	3	-2	Parabole 3 (x - 3) (x + 2)
R :	2	3	2	
R :	1	3	-2	
R :	3	3	-2	

L'expression "A (x - R) (x - S) = 0" suivie de "x = R ou x = S" qu'on trouve au brouillon peuvent aider à comprendre. Il semble qu'elles aient été écrites après l'exercice 5. Il semble qu'elles constituent le résultat du feed-back fait sur l'exercice 5 et sa solution affichée. C'est la particularité algébrique dans l'affichage "y = -2 (x - 5) (x - 5)" associée à la particularité graphique (sommet de coordonnées (0 ; 5)) qui semble déclencher la réussite. Réussite confirmée dans les exercices qui suivent.

Notons que, dans ce fichier, lors de la première rencontre de parabole particulière, vu la stratégie de calcul utilisée, l'accent est surtout mis sur l'expression algébrique. La deuxième parabole particulière est rencontrée avec une stratégie R qui met davantage l'accent sur l'articulation et le graphique. C'est la particularité algébrique remarquée dans un contexte plutôt graphique qui semble expliquer l'effet différent cette fois-ci de la situation.

Une situation particulière rencontrée en cours de traitement d'une parabole qui ne l'est pas, peut aussi être un facteur déclenchant. C'est le cas pour Igor.

<u>Igor</u> :

Lorsque Igor passe après réussite sur P3 à la forme P2, il traite l'exercice 7 et rencontre accidentellement semble-t-il, une parabole particulière.

Exercice 7 :				
P2 :	-3	2	7	Parabole $-3 (x - 2)^2 + 7$
R :	-3	3	0	
R :	-3	3	4	
R :	-3	2	7	

Igor semble confondre les sens de P et Q avec ceux de R et S. Sa réponse est suivie du tracé à l'écran d'une parabole particulière. La particularité de la valeur nulle proposée pour Q semble être remarquée et associée à l'ordonnée nulle du sommet du tracé correspondant fourni par la machine. La deuxième réponse proposée par Igor conserve les valeurs précédentes de A et P et donne à Q la valeur 4. Le feed-back semble permettre à Igor de trouver l'effet de Q.
L'exercice 8 est lui aussi de la forme P2. Igor ajuste P, A et Q étant connus dès le début. La réponse finale est correcte. La réussite sur P2 est confirmée dans la suite.

Nous venons de voir les situations particulières qu'ont rencontré 8 élèves parmi les 14 élèves dont les fichiers ont été analysés. Dans 3 cas, la situation semble rester sans effet sur la séance. C'est le cas de Géraldine qui utilise la stratégie R1 (jeu simple). C'est le cas aussi de Jeanne qui rencontre une situation particulière trop simple (P = 0 et Q = 0). C'est le cas aussi de Xavier pour lequel la situation est B = 0. Dans 2 cas, l'effet est partiel. Ce sont les cas d'Olivier et de Fabien qui rencontrent la situation est C = 0. Dans 3 cas la situation particulière semble jouer un rôle déclencheur dans la réussite globale. Ce sont les cas d'Igor, d'Antoine et d'Isabelle avec des situations particulières de type P2 ou P3. Dans les 5 cas de réussite, les stratégies des élèves sont différentes, les paraboles particulières appartiennent aux 3 types. Soulignons également que la situation particulière n'est pas rencontrée au début du travail.

Ces protocoles semblent permettre de faire les hypothèses :

1) Une condition nécessaire pour qu'une situation particulière joue un rôle déclencheur dans la réussite est qu'elle soit :

- rencontrée suffisamment tard,
- pas trop simple pour ne pas paraître "exceptionnelle",
- porteuse du sens du général (ce qui n'est pas le cas de B = 0).

2) L'effet de la parabole particulière saisie :

- n'est qu'une partiel dans le cas de P1 (à cause de B).
- est une réussite totale dans le cas de P2 et P3 (à condition d'une familiarité construite sur A).

b) REPERAGE DE POINTS REMARQUABLES

Antoine :

Antoine, au début de la séance, les utilise de façon explicite. Voici un exemple :

Exercice 1 :				
P3:	-2	1	3	Parabole -2 (x - 1) (x - 3)
C :	2	2		
C :	0	-6		
C :	1	0		

Le point de coordonnées (2 ; 2) est le sommet de la parabole tracée. Les coordonnées affichées sont celles des 3 points particuliers, le 4ème étant bien entendu (3 ; 0).
Antoine exploite ces points dans des calculs. Bien qu'il arrive à trouver R, il ne réussit pas l'exercice mais les 2 exercices qui suivent sont accompagnés tous les deux d'une réussite. On a donc un effet global.

Michel :

Michel, en utilisant la tactique TR, essaye de façon implicite cette stratégie sur 5 exercices sans réussir. Voici un exemple.

Exercice 7 :			
P3 :	1	-4	-1
R :	-7	-5	-1
R :	6	4	-1
R :	2	-2	-1

Il semble que dans la première réponse, à propos de R et S, il s'agisse d'une lecture erronée des abscisses des points sur x'x : la valeur -1, mentionnée correcte, et 4 qui correspond à la

distance de l'autre point sur x'x à O. Dans toutes les réponses, la valeur -1 est conservée et, dans la dernière réponse, les autres valeurs pourraient être, au signe près, des approximations entières des coordonnées du sommet (-2,5 ; - 2,25).
On a ici un effet partiel qui reste local, puisque non confirmé dans la suite (cf. fichier de Michel, partie 2, Chapitre V).

Michel utilise le repérage de points particuliers également avec P1, semble-t-il.

Exercice 9 :				
P1 :	-1	1	3	Parabole $- x^2 + x + 3$
R :	3	2	-1	
T :	-3	2	2	
R :	-3	3	2	

Les racines du trinôme sont $(-1 - \sqrt{13})/(- 2) \approx 2{,}3$ et $(-1 + \sqrt{13})/(- 2) \approx -1{,}3$. Les valeurs proposées dans la première réponse résultent, apparemment, d'une lecture approchée des coordonnées non nulles des points sur les axes, 3 pour l'une et proches de 2 et -1 pour les autres. Les autres propositions semblent mettre en jeu (au signe près) certaines de ces valeurs.

Pour Michel, le repérage des points remarquables reste sans effet avec la forme P1 comme avec la forme P3.

<u>Alain</u> :

Après avoir réussi à trouver le sens du coefficient C dans P1, Alain essaie de jouer directement sur les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

Exercice 6 :				
P3 :	2	-3	1	Parabole $2 (x + 3) (x - 1)$
R :	3	-3	-6	
R :	1	-3	-1	
R :	2	-3	1	

Les valeurs -6 et -1 sont respectivement l'ordonnée du point sur y'y et l'abscisse (au signe près) du second point sur x'x. Ici les points remarquables apparaissent pour la première fois, ils semblent être exploités dans le prolongement d'une réussite sur C. La réussite sur l'exercice est transférée dans la suite.

Avec Isabelle aussi, le repérage des points remarquables semble se produire suite à une réussite confirmée à P3.

<u>Isabelle</u> :

Après sa réussite confirmée sur P3, Isabelle retourne à P2.

Exercice 8 :					
	P2 :	-2	2	3	Parabole $-2\,(x - 2)^2 + 3$
	R :	-3	2	-5	
	R :	-2	2	0	
	R :	-2	2	3	

Cette fois-ci, visiblement, il n'y a pas retour à l'équation comme dans le cas de P3 (où de l'expression $A\,(x - R)(x - S) = 0$ elle déduisait "$x = R$ ou $x = S$"). Un changement de stratégie semble se produire. Une attention particulière semble être accordée aux points de coordonnées (2 ; 3) et (0 ; -5) qui sont respectivement le sommet et le point d'intersection avec y'y. C'est peut-être l'effet du résultat concernant R et S trouvé dans l'exercice précédent.

La réussite sur P2 se confirme dans les exercices qui suivent et le repérage des points particuliers semble être, ici, un facteur menant à la réussite.

Sur les 14 protocoles, 4 élèves ont utilisé cette stratégie. Dans le cas de Michel, cette stratégie persiste sur presque toute la séance sans réussite. Pour deux d'entre eux, Alain et Isabelle, cette stratégie semble naître de résultats trouvés et elle s'accompagne d'une réussite. Antoine, lui, a exploité les points remarquables de manière différente avant et après sa première réussite.

Ceci semble suggérer que la logique des points remarquables peut effectivement conduire à la réussite, sans que ceci soit systématique. Cette réussite reste, bien sûr, partielle avec P1.

c) PASSAGE PAR P3

La réussite avec la forme P3, semble jouer un rôle favorable dans la réussite à l'autre forme. Les fichiers d'Antoine, Isabelle et Igor, le montrent clairement dans le cas de P2.

Antoine :

Après sa réussite avec P3, Antoine change de forme.

Exercice 6 :					
	P2 :	-1	2	1	Parabole $-1\,(x - 2)^2 + 1$
	C :	0	-3		
	C :	2	1		
	C :	-1	0		
	R :	-2	1	-1	
	R :	-1	-3	2	

Vu le brouillon, Antoine pose un système de 3 équations en A, P et Q qu'il forme à partir des coordonnées affichées, mais il n'entame pas la résolution. Il semble qu'il procède, dans la suite, de façon similaire au cas P3 ; les valeurs 1 et -1 qui apparaissent dans la première réponse sont les abscisses des points sur l'axe des abscisses. Dans la 2ème proposition, il semble corriger A et proposer des valeurs qu'il tire du point d'intersection avec y'y, (0 ; -3) et du sommet (2 ; 1). Il semble essayer de lier P et Q directement aux coordonnées des points remarquables, stratégie qu'il met en oeuvre pour la première fois dans la séance. Cette stratégie aboutit à la réussite dans l'exercice suivant :

Exercice 7 :

P2 :	2	3	-7	Parabole $2\,(x - 3)^2 - 7$
R :	2	3	7	
R :	2	3	-7	

et la réussite se confirme dans la suite.

Isabelle :

Après sa réussite à P3, Isabelle semble reproduire le même changement de stratégie que celui d'Antoine. En effet, passant à P2,

Exercice 8 :

P2 :	-2	2	3	Parabole $-2\,(x - 2)^2 + 3$
R :	-3	2	-5	
R :	-2	2	0	
R :	-2	2	3	

Isabelle semble accorder une attention particulière aux points de coordonnées (2;3) et (0;5). La seconde proposition fournit une parabole particulière. Il est difficile d'affirmer que cette dernière joue un rôle dans la réussite mais on peut le supposer. La réussite se confirme dans l'exercice suivant :

Exercice 9 :

P2 :	1	-2	-5	Parabole $1\,(x + 2)^2 - 5$
R :	-1	-2	-5	
R :	1	-2	-5	

Igor :

Après une réussite confirmée avec P3, dans les exercices 4, 5 et 6, Igor change de forme.

Exercice 7 :				
P2 :	-3	2	7	Parabole $-3\,(x - 2)^2 + 7$
R :	-3	3	0	
R :	-3	3	4	
R :	-3	2	7	

Les valeurs 3 et 0 proviennent, semble-t-il, de lectures graphiques imprécises de R et S. Igor confond donc les sens de P et Q avec ceux de R et S. A est correct dès le début. La particularité de la valeur nulle proposée pour Q semble être remarquée et associée à l'ordonnée nulle du sommet du tracé correspondant fourni par la machine. Le jeu sur Q aboutit. Reste P.

Exercice 8 :				
P2 :	2	-1	4	Parabole $2\,(x + 1)^2 + 4$
R :	1	1	4	
R :	3	-1	4	
R :	2	-1	4	

Q est correct d'emblée. P semble associé, dans un premier temps, à "l'éloignement" du sommet de l'axe des abscisses puis, à l'abscisse du sommet. Ainsi, il apparaît que la réussite avec P3 a été réinvestie, sans adaptation au début dans le traitement de la forme P2 et qu'après adaptation, elle a entraîné une réussite à P2.

Les 3 fichiers montrent qu'une réussite avec P3 est suivie par une réussite sur P2, mais que cette réussite peut passer par un premier transfert sommaire et erroné. Ce transfert n'est cependant pas systématique. En revanche, dans le cas de réussite sur les 2 formes, l'analyse des fichiers montre que souvent, c'est la réussite sur P3 qui se produit en premier.

I-5) CONCLUSION

Nous venons d'identifier dans les fichiers étudiés des éléments de réussite dans la séance et des conditions qui semblent préciser des facteurs agissant sur ces éléments et par suite sur la progression de l'élève : cette réussite semble se déclencher par une "microrupture" résultant de ce qu'on peut appeler "une cristallisation" dans la prise du sens de certains éléments de l'articulation algébrique/graphique. Cependant, certains exemples (Antoine, Isabelle, ...) illustraient des cas où plusieurs de ces éléments semblent jouer à la fois. Ils montraient qu'il est difficile d'indiquer alors lequel de ces éléments joue le plus grand rôle.

Ces fichiers sont représentatifs des différentes stratégies observées, mais les éléments remarquables dans la progression ne sont pas nécessairement des caractéristiques de ces stratégies. La représentativité stratégique ne suffit donc pas pour étendre le domaine de validité de ces résultats à l'ensemble de la population et on se demande si les conditions de réussite dégagées de ces fichiers sont aussi valables pour l'ensemble ? Pourquoi ces éléments, sous certaines conditions, jouent-ils un rôle ? Quelles sont les possibilités d'investissement de ces résultats, si elles se confirment, dans le domaine didactique ? Nous tenterons de répondre, dans la section qui suit.

II) CONDITIONS DE PROGRESSION

Le retour aux fichiers des élèves a permis d'identifier les stratégies qui semblent être suivies par ces élèves. Les principales de ces stratégies, regroupées selon les tactiques auxquelles elles s'apparentent, sont :

Tactique R : (7)

1) Jeu simple (R1) : (3)
2) Jeu avec apprentissage (R2) : (3)
3) Capacité de réponse directe (R3) : (1)

Tactique CR : (8)

1) Utilisation réussie de "C", passage à "R" : (3)
2) Calcul à partir des points particuliers, Passage à "R" : (2)
3) Calcul, échec, refuge dans "R" : (3)

Tactique T : (5)

Jeu simple : (5)

Tactique CTR : (8)

1) Evolution du calcul contrôlé par "T" à "R" (Cas de P1 et P3):(5)
2) Echec avec "C", échec avec "T", refuge dans "R" (Cas de P2 et P3) : (1)
3) Echec avec "C", échec avec "T", passage à "R"et association visuel-algébrique (Cas de P2 et P3) : (2)

Tactique TR : (2)

1) Evolution de "T" à "R" : (1)
2) Echec avec "T", refuge dans "R" : (1)

Quatorze fichiers typiques montrant les travaux d'élèves ont illustré ces stratégies. Ils constituent un échantillon représentatif de l'ensemble des fichiers de la population, du point de vue des stratégies.

Les situations de déclenchement potentiel de progression : une situation particulière, le repérage de points remarquables ou le passage par P3, identifiées dans les fichiers de réussite de cet échantillon, n'ont pas automatiquement un effet positif. L'étude faite a montré que ces situations semblent jouer favorablement sous certaines conditions.

Nous avons émis des hypothèses :

1) Une condition nécessaire pour qu'une situation particulière joue un rôle déclencheur dans la réussite est qu'elle soit :

- rencontrée suffisamment tard,
- non trop simple pour ne pas paraître" exceptionnelle",
- porteuse du sens du général.

2) L'effet de la parabole particulière saisie :

- n'est que partiel dans le cas de P1(à cause de B),
- est global dans le cas de P2 et P3,

3) La logique des points remarquables favorise la réussite. Cette réussite reste cependant partielle avec P1, toujours pour les mêmes raisons.

4) La réussite à P3 favorise la réussite à l'autre forme travaillée. Cette réussite peut passer par un premier transfert sommaire et erroné. Elle reste, bien entendu, limitée dans le cas de P1.

Alors que les hypothèses formulées à propos des situations particulières et de la réussite à P3 sont à la fois descriptives et explicatives, l'hypothèse concernant le repérage de points remarquables n'est que descriptive. En ce sens l'étude de l'échantillon ne semble pas mettre en évidence des conditions particulières accompagnant le repérage de points remarquables qui favoriseraient la réussite ou entraineraient au contraire l'échec.

La première question qui se pose est celle de la validité de ces hypothèses. D'autres questions,naturellement associées à ces hypothèses, se posent aussi. Si la réussite à la forme P3 favorise la réussite à l'autre forme, pourquoi la réussite à la forme P1 ou à la forme P2 ne constituerait pas, elle aussi, un facteur de réussite à l'autre type traité ? Si ce n'est pas le cas, peut-on interpréter les différences entre les types en termes de "transférabilité" ?

Pour tenter de répondre à l'ensemble de ces questions nous avons procédé de la façon suivante : Identifier et relever, à travers l'analyse des situations rencontrées dans l'échantillon, les caractéristiques des situations à l'étude et de leurs environnements spécifiques, retenir des modalités de ces caractéristiques, élaborer ensuite une grille d'analyse de l'ensemble des fichiers de la population et traiter enfin, par des comparaisons statistiques élémentaires, les données ainsi recueillies.

II-1) SITUATION PARTICULIERE

Rappelons qu'une situation particulière consiste, du point de vue graphique, en la rencontre d'une parabole qui passe par l'origine ou possède un sommet sur l'un des axes.

CARACTERISTIQUES :

1) **Nature de la situation :** elle est déterminée par l'identification de l'agent qui a provoqué cette situation : le logiciel ou l'élève lui-même. Les modalités de cette caractéristique sont : SPDO pour une Situation Particulière Donnée par le logiciel et SPPE pour une Proposée par l'élève lui même.

Exemples :

1)	P1 :	2	3	0	est une SPDO.
2)	P2 :	-2	-1	3	
	C :	-1	0		
	T :	-1	0	2	est une SPPE.

2) **Moment de la rencontre :** cette caractéristique est déterminée par le numéro de l'exercice, la numérotation étant faite par type de paraboles. Les modalités sont : STAR pour une situation rencontrée dans la deuxième moitié des exercices sur le type de parabole sur lequel elle portait et STOT pour une rencontrée dans la première moitié.

3) **Type de la situation :** cette caractéristique est déterminée par le type de particularité algébrique (ou graphique). Les modalités sont :

SP11 pour une situation particulière de type P1 telle que $B = 0$ et $C \neq 0$,

SP12 pour une situation particulière de type P1 telle que $B \neq 0$ et $C = 0$,

SP00 pour une situation particulière de type P1 telle que $B = 0$ et $C = 0$ ou de type P2 telle que $P = 0$ et $Q = 0$ ou de type P3 telle que $R = 0$ et $S = 0$,

SP21 pour une situation particulière de type P2 telle que $P = 0$ et $Q \neq 0$,

SP22 pour une situation particulière de type P2 telle que $P \neq 0$ et $Q = 0$,

SP31 pour une situation particulière de type P3 telle que ($R = 0$ et $S \neq 0$) ou ($R \neq 0$ et $S = 0$)

SP32 pour une situation particulière de type P1 telle que $R = S$ ($\neq 0$).

4) **Effet de la rencontre :** cette caractéristique est déterminée par la façon dont évolue le travail suite à la rencontre de la situation. Les modalités sont : SPED pour une Situation Particulière à Effet Durable, SPEL pour Situation Particulière à Effet Local (à l'exercice) et SPSE pour Situation Particulière Sans Effet.

II-2) REPERAGE DE POINTS REMARQUABLES

Rappelons qu'il consiste à repérer les points remarquables et à les réinvestir dans la recherche de l'équation de la parabole.

CARACTERISTIQUES :

1) **Type d'utilisation :** cette caractéristique est déterminée par la manière d'exploiter les points remarquables. Les modalités en sont : RTUD pour Utilisation Directe dans les

tracés et réponses et RTUI pour Utilisation Indirecte c'est-à-dire via l'écriture d'une ou plusieurs équations obtenues par instanciation.

Exemples :

a) RTUD :

Exercice 6 (Alain) :				
P3 :	2	-3	1	Parabole 2 (x + 3) (x - 1)
R :	3	-3	-6	
R :	1	-3	-1	
R :	2	-3	1	

Les valeurs -6 et -1 étant respectivement l'ordonnée du point sur y'y et l'abscisse (au signe près) du second point sur x'x.

b) RTUI :

Exercice 2 (Antoine)				
P3:	-2	4	0	Parabole -2 (x - 4) (x)
C :	2	8		
C :	0	0		
C :	4	0		
R :	-2	0	4	

Le point de coordonnées (2 ; 8) est le sommet. Le nombre de points remarquables est réduit à 3. Antoine exploite ces points et utilise le système:

$$\begin{cases} a\,(2 - r)\,(2 - s) = 8\,; \\ a\,(0 - r)\,(0 - s) = 0\,; \\ a\,(4 - r)\,(4 - s) = 0\,; \end{cases}$$

2) **Type de fréquence :** cette caractéristique est déterminée par le nombre de fois où l'élève recourt à ces points. Les modalités en sont : RTFF pour fréquemment et RTFP pour Parfois.

3) **Type de points :** cette caractéristique est déterminée par la catégorie des points remarquables. Les modalités en sont : RTPA pour points sur axes et RTPM pour points sur axes et sommet.

4) **Effet** dont les modalités sont : REFD pour EFfet Durable, REFL pour EFfet Local (à l'exercice) et RSEF pour Sans EFfet.

II-3) TRANSFERT D'UNE FORME A UNE AUTRE

Indépendamment des deux formes mises en jeu pendant la séance, les acquis sur le coefficient A dans une forme, sont le plus souvent nettement transférés à l'autre forme. Ceci a été mis en évidence dans la comparaison des connaissances au niveau atomique :on a trouvé qu'au post-test les pourcentages de réussite sur les savoirs atomiques sur A sont sensiblement les mêmes aux deux formes traitées. Ceci est aussi remarquable de façon quasi constante dans les fichiers de l'échantillon.
A part le transfert concernant le coefficient A, la question de transférabilité n'a pas été élucidée jusqu'à maintenant.

CARACTERISTIQUES :

1) **Type de transfert :** cette caractéristique est déterminée par les types de paraboles mis en jeu par ce transfert et le sens de ce transfert. Les modalités sont : TR13 pour transfert de la forme P1 vers la forme P3, TR23 pour transfert de la forme P2 vers la forme P3, TR31 pour transfert de P3 vers P1 et TR32 pour transfert de P3 vers P2.

2) **Moyen de transfert :** cette caractéristique est déterminée par le support de ce transfert. Les modalités sont : TRAD pour transfert par adaptation, TRIA pour transfert sans adaptation au début et TRPR pour transfert par passage aux points remarquables.

Exemples :

a) TRAD : François réussit partiellement sur P1. Il semble saisir le sens de C et transfère ce sens par adaptation à R et S dans P3, à l'exercice où il s'agit de :

P3 :	3	-1	5

Il écrit 0 = (x - R) (x - S) puis R = 1 et S =5. Il propose :

R :	2	1	5
R :	2	-1	5
R :	3	-1	5

b) TRIA : Après sa réussite aux deux exercices 2 et 3 dans lesquels il manifeste une compréhension du sens de P et Q dans la forme P2, Christian passe lors de l'exercice 4 à la forme P3.

P3 :	-2	-3	1	Parabole -2 (x + 3) (x - 1)
R :	-2	-1	8	
R :	-2	2	4	
R :	-2	-2	4	

Les valeurs proposées pour R et S sont en fait les bonnes valeurs de P et Q de la forme P2 qui correspondent à la parabole : un transfert sans adaptation semble se produire.

c) TRPR : Après avoir donné du sens à R et S dans la forme P3 et après confirmation de ce sens par des réponses correctes directes, Isabelle passe lors de l'exercice 8 à la forme P2.

P2 :	-2	2	3	Parabole $-2\,(x-2)^2 + 3$
R :	-3	2	-5	
R :	-2	2	0	
R :	-2	2	3	

C'est peut être l'effet du transfert du sens de R et S au cas de P et Q. Ce transfert passe par l'utilisation des points remarquables (2 ; 3) et (0 ; -5).

3) **Effet** dont les modalités sont : TREF pour EFfet durable et TSEF pour Sans EFfet.

Soulignons que, alors que pour un fichier donné, les valeurs prises par les variables : Nature de la situation particulière, Moment de la rencontre, Type de la situation, Type de fréquence de repérage de points remarquables, Type de points et Type de transfert sont directement déterminables, les valeurs des autres variables sont plus difficilement déterminables, voire dans certains cas, impossibles à déterminer d'une façon suffisamment probante. C'est le cas surtout des variables Effet.

III) RESULTATS, EXPLICATIONS, EXPLOITATION

Les effectifs de ces modalités sont donnés par les tableaux suivants :

MODALITE	EFFECTIF	MODALITE	EFFECTIF
SPDO	16	SP21	3
SPPE	5	SP22	2
STAR	14	SP31	3
STOT	7	SP32	3
SP11	4	SPED	8
SP12	3	SPEL	6
SP00	3	SPSE	7

Tableau 5-5-1 : effectifs des modalités relatives à "situation particulière"

MODALITE	EFFECTIF
RTUD	5
RTUI	3
RTFF	2
RTFP	6
RTPM	6
RTPA	2
RSEF	2
REFL	2
REFD	4

Tableau 5-5-2 : effectifs des modalités relatives à "repérage de points remarquables"

MODALITE	EFFECTIF
TR13	3
TR23	2
TR31	3
TR32	6
TRAD	4
TRIA	4
TRPR	6
TREF	8
TSEF	6

Tableau 5-5-3 : effectifs des modalités relatives à "transfert d'une forme à l'autre"

III-1) RESULTATS

Si l'on croise les effectifs de ces modalités avec les caractéristiques d'effet, on obtient notamment les résultats suivants :

1) **Sur les 21 situations particulières :**

Nature de la situation :

- trois situations particulières proposées sur cinq et quatre situations particulières données sur seize restent sans effet.

Moment de la rencontre :

- cinq situations particulières rencontrées tôt en séance sur sept et une situation particulière rencontrée tard en séance sur quatorze restent sans effet,
- six situations données rencontrées tard en séance sur dix ont un effet durable.

Type de la situation :

- les trois situations trop simples n'ont qu'un effet local,
- les trois situations particulières de type (R = 0 ou S = 0) sont à effet (durable ou local).

2) **Sur les 14 cas de transfert :**

Type de transfert :

- pour deux élèves sur les trois concernés, le transfert de P1 vers P3 conduit à la réussite,
- pour quatre élèves sur six, le transfert de P3 vers P2 conduit à la réussite.

Moyen de transfert :

- pour quatre élèves sur six, le transfert par passage par les points remarquables est accompagné d'effet,
- pour les 2 élèves concernés, le transfert de P2 vers P3, brut tout d'abord, puis par adaptation, conduit à la réussite.

3) **Sur les 8 situations de recours aux points remarquables :**

Type de fréquence :

- pour les deux élèves concernés, le recours fréquent aux points remarquables n'a pas eu d'effet,
- pour 4 élèves sur les six concernés, le recours plus ponctuel aux points remarquables est accompagné de réussite.

Notons que le type d'utilisation et le type de points ne sont pas marqués par un type d'effet.

Ajoutons aux résultats ci-dessus des résultats plus globaux qui montrent que:

- deux fois sur trois, une situation particulière influence positivement la séance,
- le recours ponctuel au points remarquables conduit souvent (trois fois sur quatre) à la réussite,
- le transfert conduit souvent (quatre fois sur sept) à la réussite.

Nous tenterons, dans ce qui suit, de proposer des explications à ces résultats. Vu les effectifs concernés, il ne peut s'agir bien sûr que de propositions d'explication qui demanderaient à être testées sur des effectifs plus importants.Nous terminerons en suggérant des pistes pour l'exploitation didactique de ces résultats.

III-2) PROPOSITIONS D'EXPLICATION

a) PARABOLE PARTICULIERE :

1) Une situation particulière constitue un cas simple. Réussir une situation particulière ne conduit pas nécessairement à la réussite puisque réussir un cas simple ne conduit pas forcément à la réussite dans un cas complexe. Pour que ceci soit possible, il faut que le cas simple préserve une partie substantielle de la complexité globale, de telle sorte que le passage du particulier au général puisse s'inférer. Il ne faut pas non plus que que le collapsage des coefficients les uns sur les autres gêne l'interprétation. Ceci expliquerait le seuil de simplicité et le seuil de sens contenu dans la situation comme condition de déclenchement d'une progression. Ceci explique pourquoi les paraboles tangentes en O à x'x ne sont pas les plus efficaces comme "déclencheur de sens" et pourquoi la situation B=0 ne suffit pas à déclencher la prise de sens pour B.

2) Une situation particulière tire son importance du fait qu'elle est observable ou qu'elle met l'accent sur un élément observable. Une telle situation sera d'autant plus remarquable qu'elle apparaît comme exception ou semble comporter quelque chose de surprenant. Elle est donc plus remarquable si elle se produit après quelques cas complexes. Ceci explique qu'une situation a plus tendance à être efficace si elle n'est pas rencontrée au début du travail. Elle arrive alors à un moment où on s'est déjà posé des questions.

b) POINTS REMARQUABLES :

Les valeurs des coefficients, autres que A et B d'une parabole sont égales à certaines coordonnées des points remarquables de la parabole. En général le nombre de ces points est de 4 et l'utilisation directe ou indirecte de ces coordonnées, avec un certain bon sens, peut aboutir après un certain nombre d'essais et conduire au sens des coefficients. Dans le cas de P1, un seul des coefficients est à lui seul lié aux points remarquables. En plus ce point est moins remarquable que les autres puisqu'il y a toujours un et un seul point d'intersection avec y'y. D'où les limitations de la réussite.

b) LE PASSAGE PAR P3 ET LA REUSSITE :

La transférabilité d'une forme à l'autre est un élément de base dans l'élaboration du schéma de l'expérimentation. Une progression sur un coefficient est susceptible d'entraîner une progression sur des coefficients dont les interprétations relèvent d'un trait commun. Les catégories de coefficients envisageables dans ce contexte sont : celle des coefficients A dans les 3 formes, celle qui regroupe C, P, Q, R et S, la forme P3 étant, d'après notre analyse a priori, la plus facile. L'expérimentation, comme on vient de le voir, confirme l'effet attendu du passage par P3 et de la réussite à P3 sur la progression dans la séance, mais les transferts de P3 à P1 sont les moins efficaces comme on pouvait s'y attendre. Elle montre aussi des cas de transfert à P3 qui, bien que moins nombreux, sont aussi efficaces que les transferts de P3 à P1 ou P2.

III-3) EXPLOITATION

On peut imaginer que la prise en compte de ces résultats dans l'enseignement traditionnel ou dans l'exploitation du logiciel peut s'avérer, dans certains cas, tout à fait utile. Nous donnons, à titre d'exemple, des situations associées à l'enseignement des relations parabole-équation, où le recours aux cas particuliers, au passage par P3 et aux points remarquables, peut constituer un moyen d'amélioration de l'efficacité didactique de la situation. Ces situations concernent aussi bien l'organisation de cet enseignement dans le cadre classique (sans environnement informatique) que le contenu des activités proposées par les manuels et l'exploitation du logiciel.

a) ENSEIGNEMENT CLASSIQUE , MANUELS :

1) Les 3 formes P1, P2 et P3 sont les formes d'équations des paraboles les plus significatives graphiquement et les mieux adaptées à notre domaine d'enseignement : la signification graphique des coefficients de l'expression algébrique d'une fonction du secon degré. L'utilisation conjointe de ces 3 formes pour cet enseignement, nous semble pertinente parce que proposer plusieurs formes c'est offrir plusieurs occasions d'apprendre avec des processus qui peuvent être sensiblement différents efficaces pour l'une et non pour l'autre, s'adapter à la variabilité cognitive des élèves, redonner des occasions d'apprendre sans pour autant se répéter simplement.

2) Les constructions de sens assciées aux coefficients observées semblent désigner les connaissances algébriques relatives à la factorisation et à la mise sous forme canonique d'un trinôme comme points d'ancrage des éléments de la signification graphique des coefficients. D'où l'intérêt pour l'enseignement de favoriser ces ancrages algébriques.

3)Le choix de la forme P3 comme forme commune a permis de montrer l'avantage de P3 des deux points de vue accessiblité et transférabilité. P3 apparaît donc comme une forme clé dans l'apprentissage de ces savoirs. Débuter l'enseignement de l'articulation algébrique-graphique par des paraboles de type P3 pourrait constituer un bon choix dans l'organisation de l'enseignement. Une question reste cependant ouverte : est-ce que P2 aurait pu jouer le même rôle ? Il est possible d'obtenir des éléments de réponse avec une expérimentation avec P2 comme forme commune et en étudiant l'équilibre ou non des transferts P2---->P3 et P3---->P2.

4) Le rôle des cas particuliers dans le processus d'apprentissage suggère que ce n'est pas en allant progressivement du simple au complexe qu'on sera forcément le plus efficace.

b) LOGICIEL :

Nous envisageons deux possibilités d'exploitation au niveau du logiciel : dans une situation d'exploration à partir d'élaboration de conjectures et test suivant une succession d'exercices prévue au préalable (déterminée par une liste) ou suivant une succession d'exercices dictée par le résultat de l'analyse en temps réel du comportement de l'élève.
Former, dans le cas d'une exploitation de type "liste", des listes d'exercices complexes au début, et plus simples ensuite, en mêlant des situations particulières et des situations complexes, pour revenir ensuite à des situations complexes.

Dans un traitement en temps réel intelligent du travail de l'élève :

1) Après réussite sur une forme et échec sur l'autre proposer la transférabilité avec adaptation des acquis.

2) Après des échecs répétés, pour éviter une situation de blocage, injecter des situations particulières simples ou, s'il ne s'agit pas de P3, suggérer un passage à P3, ou proposer une exploitation des coordonnées des points remarquables.

3) Après réussite à un exercice qui ne constitue pas un cas particulier, proposer un cas particulier et réciproquement.

CHAPITRE VI

EXPERIMENTATION AU PREMIER CYCLE

EXPERIMENTATION AU PREMIER CYCLE

I) INTRODUCTION

L'expérimentation du logiciel en première et terminale dont les résultats ont été présentés dans le chapitre précédent, a mis en évidence un effet incontestable de l'utilisation du logiciel sur l'articulation des registres de représentation graphique et algébrique pour des fonctions du second degré. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, cette expérimentation a concerné des élèves familiers avec les fonctions du second degré et pour lesquels l'articulation visée n'était plus enjeu officiel d'enseignement. On peut légitimement se demander en quoi les résultats obtenus dépendent de ces caractéristiques de la situation expérimentale. Obtiendrait-on par exemple un effet aussi rapide et aussi net, en utilisant le logiciel sur un domaine nouveau au moment de sa mise en place officielle ? C'est pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question qu'a été conçue l'expérimentation en troisième.
Plus précisement, nous nous sommes intéressé à travers cette expérimentation aux questions suivantes :

- Obtient-on dans le cadre d'une seule séance avec le logiciel des effets aussi importants qu'en second cycle ?
- L'adaptation au jeu se traduit-elle par les mêmes phénomènes ? En particulier, les stratégies ponctuelles basées sur le calcul se trouvent-elle ici encore rejetées au profit de stratégies plus globales de lecture-estimation ?
- Obtient-on comme dans la première expérimentation un transfert quasi-intégral des acquis en séance ?
- Peut-on identifier ici encore des facteurs déclencheurs d'apprentissage ? Si oui, en quoi sont-ils proches ou non de ceux identifiés dans la première expérimentation ?

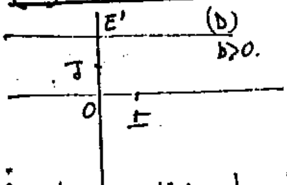
L'expérimentation organisée en premier cycle s'est déroulée en avril 1991 dans une classe de troisième. Elle a porté sur la partie "équations et droites" du logiciel et une seule forme a été proposée : la forme $y = A x + B$ correspondant au programme de troisième. Cette deuxième expérimentation a été menée pour accentuer le contraste avec la première, au moment de l'enseignement du chapitre "Equations de doites", juste à la fin des séances consacrées à cet enseignement. Le dispositif adopté en revanche a été le même : pré-test, séance informatique, post-test.

Précisons que le cours mettait l'accent sur l'articulation des registres graphique et algébrique en insistant sur le sens : graphique --------> algébrique souvent négligé par l'enseignement. Il s'est terminé par un paragraphe sur la lecture graphique de l'équation d'une droite dont voici un résumé :

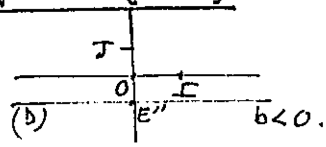
Équation d'une droite (D) - lecture graphique

(O, I, J) est un repère.

I (D) est une droite parallèle à (OI) passant par E (0, b).



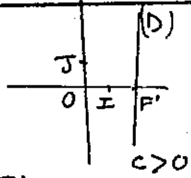
equation d(D) : $y = b$.

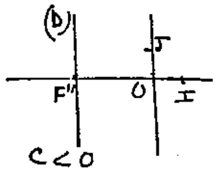


NB - $b = 0$ (D) est confondue avec (OI).

II (D) est une droite parallèle à (OJ) passant par F (c, 0)

equation de (D) : $x = c$

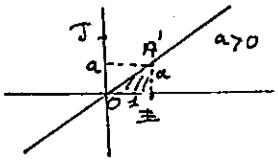


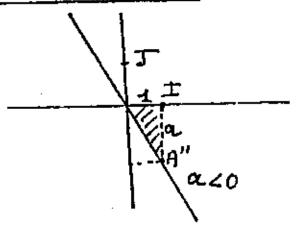


NB. $c = 0$ (D) est confondue avec (OJ)

III (D) passe par O et par le point A de coordonnées (1, a).

equation de (D) $y = ax$.





NB. $a = 0$ (D) est confondue avec (OI).

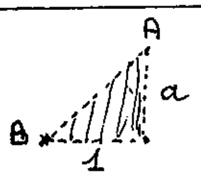
IV (D) passe par deux points A et B

B de coordonnées $(0, b)$
A de coordonnées $(1, a+b)$

equation de (D) : $y = ax + b$.

A est sur (D) $a \times 1 + b = a + b$

B est sur (D) $a \times 0 + b = 0 + b = b$.

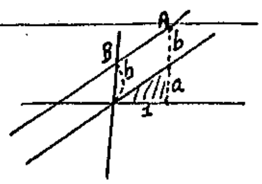


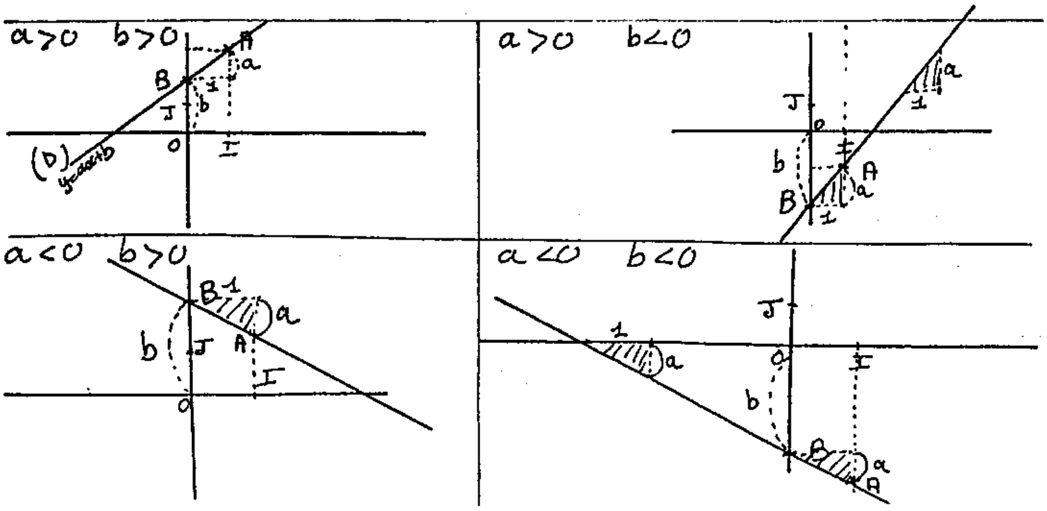
$\overrightarrow{BA}\ (\Delta x, \Delta y)$

$0 + \Delta x = 1$ $\quad \Delta x = 1$

$b + \Delta y = a + b$ $\quad \Delta y = a$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$.





L'établissement d'expérimentation était un collège public de la banlieue parisienne. La classe de troisième de 23 élèves était de niveau mathématique plutôt faible comme en témoignent les moyennes de l'année précédente et de l'année en cours.

Moyenne	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Effectifs	1	5	3	3	3	3	0	4	0	1

Tableau 6-1: moyennes des élèves de troisième.

La moyenne de la classe est de 8,65.
L'enseignante était une animatrice IREM ayant l'habitude d'utiliser dans son enseignement des environnements informatiques et les élèves concernés avaient déjà utilisé l'outil informatique en mathématiques.

Soulignons également que les équations de droites étant, au moment de l'expérimentation, enjeu officiel d'enseignement, il n'était pas acceptable, en termes de contrat didactique de ne pas corriger le pré-test. Il a donc été corrigé. Ceci constitue une différence de plus avec la situation expérimentale au second cycle.
Dans le premier cas, en résumé, les élèves avaient suivi un enseignement traditionnel mettant peu l'accent sur les relations graphique --------> algébrique, cet enseignement était ancien et le rapport aux savoirs considérés pouvait être considéré comme stable en première approximation. Dans le second cas, les savoirs étaient nouveaux fortement marqués par la proximité de l'enseignement au pré-test, sans doute moins un mois plus tard au moment du post-test, d'où des phénomènes prévisibles de maturation comme d'oubli entre pré-test et post-test. Enfin, le pré-test avait été corrigé, cette correction devant jouer, on peut en faire l'hypothèse, un rôle dans les évolutions pré-test/post-test constatées.

Comme pour l'expérimentation en second cycle, nous commencerons par présenter les résultats obtenus aux pré-test et post-test avant d'analyser les données issues de la séance informatique. Comme on le verra, les données recueillies dans cette deuxième expérimentation sont beaucoup moins riches que celles de la première. C'est pourquoi, au niveau des analyses, il nous a semblé que l'usage de méthodes statistiques d'analyse multidimensionnelle ne se justifiait pas.

II) TESTS

II-1) QUESTIONNAIRES

Les questionnaires ont été présentés dans le chapitre IV. Ils sont construits, rappelons-le autour des savoirs atomiques suivants :

Aeg : (pentes égales <---> droites parallèles)
Beg : (valeurs égales de B <-----> droites traversant y'y au même point)
Apos : (pente positive <-----> la droite "monte"[1])
Aneg : (pente négative <-----> la droite "descend"[2])
Anul : (pente nulle <------> droite parallèle à x'x)
Bpos : (B>0 <------> droite traverse y'y au dessus de x'x)
Bneg : (B<0 <------> droite traverse y'y au dessous de x'x)
Bnul : (B = 0 <-----> droite passe par l'origine)
Aord : (|A1| < |A2| <-------> D1 est moins inclinée que D2)
Bord : (B1<B2 <-------> D1 traverse y'y en dessous du point où D2 traverse y'y)
Aop : (A1 = - A2 <-----> D1 et D2 sont symétriques par rapport à une parallèle à x'x)
Bop : (B1=-B2 <-----> D1 et D2 traversent y'y symétriquement par rapport à l'origine)

Tableau 6-2 : savoirs mis en jeu par les tests.

II-2) PASSATION DES TESTS

Le pré-test a été passé une semaine après le cours sur les fonctions affines et les droites représentations graphiques des équations de la forme y=Ax+B. Avant de distribuer les sujets, le professeur a précisé la signification des notations indexées et souligné qu'il n'était pas nécessaire de faire des calculs pour répondre aux questions posées. La plus grande partie des élèves ont laissé des brouillons.

Apparemment les élèves n'ont pas été surpris par le type de tâche qui leur était proposée et la plupart des élèves ont travaillé pendant toute la durée impartie au test soit durant une heure.

Les productions des élèves montrent qu'ils ont cherché à réinvestir certaines techniques de travail et certains savoir-faire, rencontrés en cours sur 3 points au moins :

- Au niveau numérique-algébrique (calcul de pentes, substitution de coordonnées de points et pentes dans l'équation) : en dépit de la remarque du professeur sur la non nécessité des calculs, de la mention explicite "sans calculer" figurant dans les énoncés des questions[3], onze élèves ont effectué des calculs pour répondre. Ces calculs ont porté sur A et B, sauf pour deux élèves, pour lesquels ils ont porté seulement sur A. Six parmi ces élèves ont réussi la

[1] de la gauche vers la droite.
[2] de la gauche vers la droite.
[3] le questionnaire a été présenté au chapitre IV

plupart des questions des deux exercices 1 et 2 qui portaient sur le signe, la nullité et l'égalité du coefficient A et du coefficient B.

- Au niveau graphique : quatre élèves ont utilisé une règle et tracé des droites horizontales et verticales pour faciliter la lecture des coordonnées de certains points des droites données ou ont marqué, par un arc sur l'axe des ordonnées l'éloignement du point d'intersection de la droite et de l'axe de l'origine. Deux parmi eux ont réussi la plupart des questions des exercices 1 et 2. Deux élèves ont laissé des marques pour désigner des angles correspondants ou alternes-internes entre certaines droites parallèles. Un seul d'entre eux a réussi les questions sur les pentes égales et sur le signe de B.

- Au niveau des formulations : Trois élèves ont écrit, soit sur leur brouillon, soit sur leur copie "a = coefficient directeur = $\Delta y/\Delta x$" et "b = décalage ou écart". Deux de ces élèves sont parmi les onze déjà cités mais ils n'ont pas réussi le test. On peut faire l'hypothèse qu'il y a eu pour ces élèves constitution d'un schéma (au sens décrit par Schoenfeld et al., cf. chapitre II) sans racines solides à des niveaux plus profonds.

Le post-test a eu lieu un mois après. Entretemps, les élèves ont suivi la séance informatique mais n'ont pas retravaillé sur les articulations algébrique/graphique en dehors de cette séance.
On note chez les élèves un changement d'attitude vis-à-vis de l'activité proposée et des comportements a priori plus adaptés aux tâches proposées. Ainsi,

- Au niveau numérique-algébrique : quatre élèves seulement parmi les onze précédemment cités ont recours aux calculs et uniquement pour trouver la pente. Deux d'entre eux se trompent d'ailleurs presque tout le temps dans leurs calculs.

- Au niveau graphique : neuf élèves ont utilisé une règle ou des segments tracés, un seul a marqué certains angles correspondants associés à des droites parallèles.

- Au niveau des formulations : on ne trouve plus ni la récitation formelle du cours que nous avons attribuée à un fonctionnement au niveau schéma, ni d'expression écrite sur l'interprétation de A et B. Ce changement peut être attribué à l'éloignement du cours.

Il y a donc visiblement une tendance beaucoup plus forte à l'exploitation graphique directe sans recours aux calculs.

II-3) <u>RESULTATS</u>

Soulignons que le pré-test a été corrigé, avant la passation du post-test. Les évolutions constatées ne peuvent donc pas a priori être uniquement attribuées à la séance informatique.

a) <u>PRE-TEST</u>

1) Globalement les coefficients A et B sont au même niveau de réussite (36%) et les savoirs présentent la même hiérarchie interne par rapport à la réussite :

signe	>	valeurs particulières et relations (Taille)	>	ordre

puisque les pourcentages de réussite sont :

Coefficient	signe	valeurs particulières et relations	ordre
A	50	36	9
B	39	35	30

Tableau 6. 3 : pourcentages des savoirs concernant signe, ordre et valeurs particulières au pré-test.

mais les 3 classes internes des savoirs sur B se séparent beaucoup moins au niveau de la réussite. Les savoirs sur B se montrent ainsi au même niveau de difficulté, ce qui n'est pas anormal puisqu'il s'agit de savoirs tous ponctuels mais cette difficulté n'est pas parallèle aux constats effectués sur C dans la première expérimentation. Concernant A, le savoir SA se montre beaucoup plus accessible que le savoir OrdA, ce qui est conforme aux observations réalisées en second cycle.

Pour les deux coefficients A et B, valeurs particulières et relations sont au même niveau de réussite. On note une différence, légère à propos du signe, mais plus importante lorsqu'il s'agit de l'ordre. Remarquons que l'ordre sur B est mieux perçu que l'ordre sur A. Ceci est normal si l'on se refère aux résultats de recherches comme celle de Duval qui montrent que les caractéristiques globales sont moins maîtrisées par les élèves que les caractéristiques ponctuelles. Mais soulignons cependant que cette domination des connaissances ponctuelles n'est pas systématique puisque le sens du signe de B est moins bien perçu que celui de A. On peut faire l'hypothèse que l'enseignement proche dispensé avec ses caractéristiques déjà signalées n'est pas étranger à cette domination des savoirs globaux sur des savoirs ponctuels. Or, on se rappelle qu'en première/terminale aussi, certains savoirs globaux (relatifs à A) étaient plus accessibles que certains savoirs ponctuels (surtout ceux relatifs à C) et que nous avions fait à ce propos l'hypothèse que ceci est dû partiellement à l'enseignement usuel qui met l'accent sur la forme $y = A x^2$. Dans les deux cas donc,on peut faire l'hypothèse que l'enseignement n'est pas neutre par rapport à cette hiérarchie cognitive.

2) Au niveau atomique le regroupement suivant classe les savoirs selon le pourcentage de réussite. Il montre des différences entre savoirs sur A et savoirs sur B :

Réussite %	~ 50	30-40	10 - 20
Connaissances	AopA[4] Aeg SA Bnul	SB Anul Bop Bord Beg	AopHA[5] Aord

Tableau 6-4 : classes de connaissances selon la réusite au pré-test.

Par rapport à la réussite, les savoirs sur A et B semblent être hiérarchisés d'une façon schématique comme suit :

Orientation, parallélisme et symétrie > intersection avec y'y > ordre sur la pente

On voit en première position des savoirs qui sont liés aux propriétés de parallélisme des droites, de symétrie par rapport aux axes, et d'orientation (croissante/décroissante, monte/descend). Ce sont donc des savoirs globaux sur les droites sauf Bnul. En deuxième position on voit des savoirs qui sont plutôt des savoirs ponctuels. En troisième place, il s'agit de nouveau de savoirs globaux.

Les savoirs ponctuels séparent en fait des savoirs globaux simples et des savoirs globaux complexes selon le schéma suivant :

global simple > ponctuel > global complexe

Ceci montre que la hiérarchie brute : ponctuel > global, ne résiste pas à un enseignement qui prend en compte la démarche globale de passage entre graphique et algébrique comme c'est le cas ici. Les rapport de difficulté entre ponctuel et global deviennent alors plus subtils.
Rappelons que dans le cas des paraboles :

- La hiérarchie des connaissances sur A était presque la même pour les 3 formes :

[4] AopA désigne : "droites de pentes opposées se coupant sur les Axes".
[5] AopHA désigne : "droites de pentes opposées se coupant Hors Axes".

SA > Aeg > Aop > AOrd

- Les savoirs sur les coefficients selon leur lien au graphique étaient hiérarchisés comme:

ouverture et orientation > Sommet > intersection avec les axes

On avait donc déjà une domination de certaines connaissances globales sur des connaissances ponctuelles.

Les résultats au pré-test sont "meilleurs" en troisième qu'en première/terminale. Ils montrent ainsi :

- l'effet de l'enseignement proche,
- l'effet des caractéristiques de cet enseignement, visibles aussi à travers la façon dont les tâches ont été reçues.

b) <u>POST-TEST</u>

1) Globalement, et comme au pré-test, A et B sont au même niveau de réussite (60%) et les savoirs selon la réussite présentent la même hiérarchie interne :

signe > valeurs particulières et relations > ordre

puisque les pourcentages de réussite sont respectivement :

Coefficient	signe	valeurs particulières et relations	ordre
A	72	63	26
B	72	63	48

Tableau 6-5 : pourcentages des savoirs concernant signe, ordre et valeurs particulières au post-test.

Cette fois ce ne sont pas seulement les valeurs particulières et relations qui sont au même niveau pour les deux coefficients mais aussi le signe. L'écart entre ordre, valeurs particulières et relations reste plus réduit pour B que pour A car l'ordre sur B est mieux perçu que l'ordre sur A. Soulignons que la difficulté concernant OrdA résiste à l'effet de la séance-correction du pré-test comme de la séance informatique.

2) Le regroupement des savoirs selon l'importance du pourcentage de réussite conduit au tableau suivant :

Réussite %	70- 80	45-65	20-35
Connaissances	AopA Aeg SA Bnul SB	Anul Bop Bord Beg	AopHA Aord

Tableau 6. 6 : classes de connaissances selon la réusite au post-test.

Une grande réussite donc aux savoirs qui sont liés aux propriétés de parallélisme des droites, de symétrie par rapport aux axes, et d'orientation auxquels s'ajoutent aussi le signe de A et B. L'ordre sur A ne dépasse pas les 30%, il reste le savoir le moins intégré. Les savoirs sur B sont répartis sur les deux premières colonnes : ceux de la première étant ceux qui mettent en jeu une seule droite et ceux de la seconde colonne, ceux qui mettent en jeu plusieurs droites, ce qui est raisonnable.

A part le fait que SB a rejoint SA, on retrouve la même organisation qu'au pré-test :

Orientation, parallélisme et symétrie > intersection avec y'y > ordre sur la pente

Le classement des savoirs par rapport à la réussite et leur analyse de hiérarchie de différents points de vue : nombre d'objets qui interviennent, unités perceptives et unités symboliques mises en jeu, adéquation entre unités perceptives et unités symboliques nous ont conduit aux résultats donnés par le tableau suivant, dans lequel on trouve, à côté des codes déjà vus lors de l'analyse de hiérarchie des savoirs associés aux fonctions du second degré, le code "ANE" qui désigne "ancien non élémentaire" :

Savoir	Position	Nombre d'objets	Variables et Unités perceptives	Type d'objets perceptifs	Variables et Unités symboliques	Adéquation/ non adéquation
SA	1	1	la variable : orientation de la droite	N	la variable : signe de A	N F (absence du symbole si A>0)
SB	2	1	la variable : position du point sur y'y par rapport à x'x	AE	la variable : signe de B	A
Anul	2	1	l'unité : la droite est horizontale	AE	l'unité : V25 = "rien"	N F (absence de symboles)
Bnul	1	1	l'unité : la droite passe par O	AE	l'unité : absence du groupe de symboles + B	N F (absence de symboles)
Aeg	1	2	l'unité : les droites sont parallèles	AE	l'unité : mêmes valeurs pour A	A
AopA	1	2	l'unité : les droites sont symétriques par rapport à x'x ou y'y	AE	l'unité symbolique : valeurs opposées pour A.	A
AopHA	3	2	l'unité : les droites sont symétriques par rapport à une droite parallèle à x'x ou à y'y non tracée	ANE	l'unité : valeurs opposées pour A.	A
Beg	2	2	l'unité : même point sur y'y	AE	l'unité : même valeur pour B	A
Bop	2	2	l'unité : points sur y'y symétriques par rapport à O	AE	l'unité : valeurs opposées pour B	A

Aord	3	> 2	les variables : orientation et inclinaison de la droite	N	les variables : signe et valeur absolue de A	N F
Bord	2	> 2	la variable : position du point sur y'y	AE	les variables : signe et valeur absolue de B	A

Tableau 6.7 : Les savoirs atomiques selon différents critères.

Ce tableau montre que :
- Pour le critère nombre d'objets :

a) les savoirs associés à un seul objet occupent essentiellement la première position par rapport à la réussite,

b) les savoirs associés à deux objets occupent essentiellement les deux premières positions par rapport à la réussite,

c) les savoirs associés à plus que deux objets occupent les deux dernières positions par rapport à la réussite,

ce qui semble montrer que la difficulté, comme pour les savoirs relatifs aux fonctions du second degré, croît en moyenne avec le nombre d'objets.
- Pour le critère adéquation/non adéquation entre unités perceptives et unités symboliques, il n'y a pas de différences significatives par rapport à la réussite.

Si on fait la distinction entre savoirs ponctuels et savoirs globaux, on remarque que les savoirs ponctuels, comme dans le cas des fonctions du second degré, décloisonnent les savoirs globaux simples (AopA, Aeg et SA) et les savoirs globaux complexes (AopHA et Aord).

Rappelons qu'au second cycle, la hiérarchie des connaissances au post-test sur A était la même pour les 3 formes :

OA	<<	TA	<	SA

Cette hiérarchie est la même au premier cycle et elle est valable aussi pour B. Elle est aussi respectée par les coefficients P, Q, R, S et C. Ainsi pour tout coefficient impliqué dans cette recherche (excepté B dans P1), on a, selon la difficulté des savoirs associés :

signe	<	taille	<	ordre

Entre pré-test et post-test la structure globale des savoirs étudiés à propos des droites et leurs équations n'est pas modifiée. Les structures internes des savoirs sur A et des savoirs sur B ne sont pas elles non plus modifiées.

Entre pré-test et post-test le pourcentage de réussite globale est passé de 36 à 60. Au second cycle, rappelons-le, il était passé de 13 à 53. Un progrès moins apparent que dans le cas du second cycle puisque moins grand de façon absolue mais remarquable puisque le niveau au pré-test est plus élevé. A priori, au vu des conditions expérimentales, ce progrès ne peut pas être imputé uniquement à la séance informatique. Que s'est-il passé et comment ce progrès s'est-il manifesté en cours de cette séance ? C'est ce que nous verrons dans la partie suivante.

III) SEANCES INFORMATIQUES

La salle informatique disposait de 8 postes. Les 23 élèves ont été repartis en 3 groupes de travail individuel pendant une heure. Brouillons et fiches d'indications sur le logiciel leur ont été fournis. L'utilisation des fiches personnelles et résumés du cours a été permise.

Le professeur explique au groupe, rapidement et verbalement, le jeu, le menu principal du jeu et les options. Elle insiste sur le fait que le jeu ne demande pas nécessairement de calculs. Aux groupes des deux dernières séances, suite aux observations effectuées lors de la première séance qui avaient mis en évidence des blocages créés par la crainte de dépenser son capital, elle souligne que ce n'est pas gênant de dépenser son capital puisque ce capital se régénère à chaque exercice et que le nombre d'exercices traités est lui même pris en compte. Cette précision a paru nécessaire car le logiciel, sous cette version, affichait uniquement le score et non le nombre d'exercices résolus.

Les élèves ont eu du mal à entrer dans le jeu. Ils ne savaient pas quoi faire à partir de la droite tracée. Le texte et l'explication du professeur ne semblent pas avoir été clairement compris. Des interventions individuelles auprès des élèves ont été souvent nécessaires. On a noté aussi une confusion à la première séance entre les coefficients à déterminer (A et B) et des points, les lettres majuscules désignant, dans le langage mathématique du collège, d'habitude, des points. Pour les séances suivantes, les coefficients ont été renommés a et b.

L'option tracé était en particulier mal comprise et la familiarité de certains élèves avec certaines approches d'exploitation directe du graphique en situation papier/crayon, manifestées au pré-test, semblent ne pas avoir été réinvesties d'emblée.

On a noté un recours quasi-exclusif, au départ, à l'option coordonnées. Des erreurs de calculs ont conduit alors, le plus souvent, à des valeurs non entières. Incapables de corriger ces erreurs, les élèves ne savaient pas quoi faire. D'où de nombreux blocages. Peu d'élèves se sont intéressés à la recherche de droites parallèles (dans le but de visualiser comme dans le cours, semble-t-il, le coefficient B). A ceux qui restaient bloqués avec l'option C, un conseil était donné : essayer avec T. Mais le passage à T ne s'est pas nécessairement traduit par une progression des élèves. Les plus faibles, n'ayant aucune idée du sens graphique possible de a et b, n'arrivaient pas à interpréter les feed-back reçus.

IV) EXEMPLES DE FICHIERS

Les observations sur les séances montrent une entrée difficile dans le jeu et un nombre faible d'exercices traités. Les fichiers comportent en moyenne 3 exercices tandis qu'au second cycle ce nombre est de 8. Les tactiques rencontrées sont C, T, et CT. Nous montrerons un fichier représentatif de la tactique C : c'est celui de Mickael. Nous présenterons ensuite deux fichiers représentatifs de la tactique T : l'un est celui de Céline qui, pour entrer dans le jeu, a suivi le conseil du professeur et a réussi sa séance, l'autre est celui de Marly, élève très faible qui ne progresse pas au cours de la séance. Nous présenterons enfin deux fichiers relevant de la tactique CT : celui de Fatih dont la réussite pendant la séance n'est pas réinvestie au post-test et celui de Valérie dont la réussite à la session s'est accompagnée d'un progrès pré-test/post-test remarquable.

MICKAEL

Fichier : Mickael est un élève de niveau moyen. C'est lui qui a traité le plus grand nombre d'exercices : 11 exercices.

Exercice 1 :

D :	-6	0
C :	0	0
C :	-1	6
R :	-6	0

Mickael écrit : x = -1 ; y = 6 et un peu plus loin x = 0 ; y = 0.

Ensuite, $6 + \Delta y = 0$; $\Delta y = -6$ et $-1 + \Delta x = 0$; $\Delta x = 1$ et

$\Delta y/\Delta x = -6$ [A trouvé]

$6 = (-6)(-1) + B$;

$6 = 6 + 0$ [B trouvé]

Une technique simple et bien maîtrisée conduit sans aucune erreur à la bonne réponse. La situation particulière, apparemment, n'a pas été remarquée.

Exercice 2 :

D :	-5	1
C :	0,7	-2,5
C :	-1	6
T :	0	6
C :	0	1
R :	-5	1

Les coordonnées qui apparaissent au brouillon sont (-1 ; 6) et (0.7 ; -2.5). Exactement comme dans l'exercice précédent et à partir de ces coordonnées, Mickael trouve sans problème la bonne valeur de A qui est -5. Ensuite il écrit : y = (-5) (-1) + 1 puis y = 6.
A ce moment il semble perdu, trace y = 6, mais se rendant compte de son mauvais tracé, affiche (0 ; 1), écrit B = 1 et corrige sa réponse. Peut être un début de sens pour B.
Soulignons que la proposition T : 0 6 constitue d'après notre analyse une situation particulière proposée, mais on ne sait pas si elle est perçue par Mickael comme telle ou si elle a, a fortiori, contribué en tant que telle, à la construction de la bonne réponse.

Aux exercices 3 et 4 Mickael évolue dans sa stratégie : il affiche 2 points, l'un d'eux étant toujours l'intersection avec y'y, ce qui lui donne directement B, et ensuite il calcule comme d'habitude (par $\Delta y/\Delta x$) A. Bonnes réponses.

Exercice 5 :

D :	6	0
C :	1	6
R :	6	0

Situation particulière donnée partiellement exploitée. Mickael n'affiche pas (0 ; 0) il le lit directement, écrit x= 0 , y =0 et note B = 0 puis calcule A.

Exercice 6 :

D :	6	-3
C :	0	-3
C :	1,3	4,8
R :	6	-3

De nouveau affichage du point sur y'y. Pas de lecture directe de B.

Exercice 7 :

D :	0	-5
R :	0	-5

Situation particulière donnée non exploitée comme telle. Mickael lit B, écrit B = -5, calcule A par substitution et donne la bonne réponse.

Exercice 8 :

D :	-1	0
C :	-2	2
R :	-1	0

Mickael semble très fidèle à sa stratégie. Il continue ainsi jusqu'à l'exercice 11. Seule exception : l'exercice 9.

Exercice 9 :		
D :	0	-4
R :	0	-4

Situation particulière reconnue et réponse résultant apparemment d'une lecture directe.

Pré-test/Post-test : Le post-test est quasiment analogue au pré-test : pas de connaissances manifestées sur OrdA, OrdB et Aop ni au pré-test ni au post-test. Apparemment il n'y a pas de progrès.

FATIH

Fichier : Fatih est un élève de niveau faible qui débute la séance par C et après échec désemparé, passe, suivant le conseil du professeur, à T.

Exercice 1 :		
D :	1	2
C :	2	4
C :	3	5
R :	1	2

Fatih se trompe dans le calcul de Δx et trouve $\Delta y/\Delta x = 1/2$ au lieu de 1. Perdu, il ne voit pas quoi faire d'autre. Blocage. A la demande du professeur, il vérifie ses calculs et trouve 1. B est lu, semble-t-il puisque trouvé directement.

Exercice 2 :		
D :	0	0
R :	0	0

Situation particulière rend A directement lisible. Fatih saisit l'occasion ; sur le brouillon on voit seulement B = 0; A =0. L'horizontale est repérée.

Exercice 3 :		
D :	-3	3
C :	-1,7	8,1
C :	-2,7	11,1

T :	-2	3
T :	-1	3
T :	1	3
T :	-4	3
T :	-3	3
R :	-3	3

B est lu. Dans son calcul de A, Fatih confond Δx et Δy et trouve -1/3 au lieu de -3. Blocage. Le professeur lui propose cette fois-ci de tracer pour s'en sortir, mais il ne sait absolument pas quoi proposer pour A. Forcé, il propose -2. Après le tracé il bouge A dans le mauvais sens sans comprendre ce qui se passe. Apparemment, pour Fatih, A est sans signification graphique. Alors qu'il veut se raccrocher au calcul, c'est le professeur qui lui explique le rapport entre ce qui se passe à l'écran quand on change A et ses calculs de $\Delta y/\Delta x$. Il dit qu'il a compris et propose 1! Enfin il réussit.

Pré-test/Post-test : Apparemment ce travail tardif et court avec le sens de A ne semble pas suffisant pour produire un effet. Le progrès pré-test/post-test léger. A côté des connaissances sur Aeg, Beg, Aop et Bop manifestées aussi au pré-test, Fatih manifeste au post-test des connaissances sur OrdB mais ordonne les A dans l'ordre inverse.

VALERIE

Fichier : Valérie est une élève de niveau moyen qui a utilisé l'option T tout au long de la séance.

Exercice 1 :

D :	-3	-4
T :	-4	-4
T :	1	-4
T :	-1	-4
T :	-3	-4
R :	-3	-4

Aucune trace concernant B qui est correct. Il est lu, semble-t-il. La première valeur de A donnée, résulte d'un calcul erroné. La mention "Faux, mais presque" apparaît au brouillon après le premier essai. Au second essai, 1 semble être une estimation de A. Le signe est vite corrigé et l'ajustement de A aboutit. Un sens pour A est en construction, semble-t-il.

Exercice 2 :

D :	5	-3
T :	1	-3
T :	3	-3

T :	4	-3
T :	2	-3
T :	1	-4
T :	4	-3
C :	1,3	3,5
T :	5	-3
R :	5	-3

B est repéré dès le départ. Le -4 en cours de séance et qui est corrigé juste après, semble résulter d'une erreur de frappe. Jeu sur A par estimation. Le signe est bon dès le début. Mais on note des difficultés à ajuster la taille de A. Après l'affichage des coordonnées d'un point, un essai de calcul de A à partir de ces coordonnées exclusivement, aboutit à la valeur -1,66. La valeur 5 des 2 dernières propositions semble donc être une estimation parce qu'elle n'est pas liée à ce calcul écrit.

Exercice 3 :

D :	-6	1
T :	-8	1
C :	-1	7
R :	-6	1

Le sens de B semble acquis. -8 semble être le fruit d'une estimation. Le signe est bon. L'ordre de grandeur de A est bon. Apparemment, ne sachant pas dans quel sens poursuivre ses estimations, elle retourne au calcul. Les coordonnées sont exploitées cette fois-ci avec les coordonnées du point sur y'y. -6 résulte du calcul, par substitution dans l'équation y =Ax+1. On voit ici une capacité construite de calcul de la valeur de A mais pas de manifestation de compréhension de la dynamique de A.

Pré-test/Post-test : Le travail à plusieurs reprises avec T semble avoir des implications sur les connaissances sur A. On note un progrès remarquable au post-test surtout au niveau de l'ordre de B et de l'ordre de A ce qui n'était pas prévisible en fin de séance.

CELINE

Fichier : Céline est une élève de niveau moyen qui, comme Valérie, commence sa séance en effectuant des tracés et connaît une évolution durant la séance.

Exercice 1 :

D :	3	-2
T :	4	2
T :	4	1

T :	3	1
T :	5	1
T :	4	-2
T :	3	-2
R :	3	-2

Après 4 essais, Céline semble comprendre le sens de B. Le signe de A est bon dès le début et A est enfin ajusté. Réussite après 6 tracés. Une valeur correcte de A a été rencontrée entretemps mais non repérée.

Exercice 2 :

D :	-4	5
T :	-3	5
T :	-4	5
R :	-4	5

B est trouvé d'emblée et la taille de A est corrigée rapidement.

Exercice 3 :

D :	4	4
T :	4	3
T :	3	5
T :	3	3
T :	3	4
T :	2	4
T :	6	4
T :	5	4
T :	4	4
R :	4	4

Les savoirs qui ont semblé se construire à travers les deux exercices précédents se montrent fragiles. Si B est réinvesti après le troisième coup, il faut 8 tracés pour retrouver la bonne taille de A, pourtant donnée dès le premier tracé. Aux deuxièmes et troisième tracés le parallélisme n'a pas été repéré, peut-être par manque de concentration sur A et priorité donnée à B. Le signe de A est toujours bon, mais le jeu sur l'ordre de A ne s'effectue pas toujours dans le bon sens.

Exercice 4 :		
D :	4	-5
T :	7	-5
T :	6	-5
T :	5	-5
T :	4	-5
R :	4	-5

B est bon dès le début. Un bon parcours montrant un sens de l'ordre sur A.

Exercice 5 :		
D :	-6	3
T :	-6	1
R :	-6	1
R :	-6	2
T :	-6	3
R :	-6	3

Pour la première fois, A est trouvé dès le début mais cette réussite s'accompagne d'une perturbation sur B qui se traduit par une erreur non repérée. Cette fois-ci c'est A qui est stable. Céline semble avoir l'impression de pouvoir répondre plus directement; premier cas de réponse anticipée. Comme ça ne marche pas, elle revient à T.

Exercice 6 :		
D :	-1	-5
T :	-5	-5
T :	-1	-5
R :	-1	-5

Correction très rapide. Bonnes performances.

Pré-test/Post-test : Grand progrès pré-test/post-test ; Au pré-test Aeg, Beg, Apos, Aneg, AopHA et Bop et au post test il y a en plus, Anul, Bnul, Aord et Bord.

MARLY

Fichier : Marly est une élève très faible. Elle adopte l'option T dès le début et continue la séance avec T sans manifester d'apprentissage.

Exercice 1 :

D :	-3	5
T :	4	2
T :	-4	2
T :	-4	4
T :	-4	8
T :	-4	6
T :	7	5
T :	-7	5
T :	-4	5
T :	-5	5
T :	-4	3
R :	-4	1

Le premier essai permet de corriger le signe de A qui reste bon presque tout le temps. On note le non repérage du parallélisme durant 3 essais successifs. Après 5 essais, Marly semble avoir compris le sens de B. Pourtant les deux dernières propositions sont erronées. On peut faire à ce propos au moins deux hypothèses :

- la bonne valeur de B n'est pas repérée,
- les connaissances apparemment construites sur B sont déstabilisées en fin d'exercice par l'échec repété.

Exercice 2 :

D :	2	-1
T :	3	4
T :	3	-1
T :	7	-1
T :	1	-1
T :	2	-1
R :	2	-1

Le savoir sur B semble surgir : B est correct dès le second tracé. L'ordre suivi sur A finit par être bon. C'est la première et dernière réussite. Même un élève faible peut tirer donc apparemment parti de la situation.

Mais, apparemment, les savoirs qui semblent mis en place, ne sont pas réinvestis au post-test ; on ne note pas de progrès pré-test/post-test : les seules connaissances manifestées, à la fois au pré-test et au post-test sont Aeg, Apos et Bpos.

V) CONCLUSION

L'analyse des traces des travaux des élèves laissés dans les fichiers informatiques, les brouillons et les tests, les observations des professeurs sur le déroulement du cours, des tests et des séances informatiques montrent que :

Ceux qui choisissent C comme option se trompent souvent dans leurs calculs et arrivent rarement à réussir dans la séance. Même lorsqu'ils réussissent avec stabilité, comme c'est le cas pour Mickael, cette réussite reste, apparemment, sans effet sur le résultat au post-test. Ceci a été aussi remarqué au second cycle et on se rappelle l'exemple de Fabien qui réussit la séance avec C selon la stratégie

C brut -----------> R1
Succès

sans vraiment progresser entre pré-test et post-test.

Certains parmi ceux qui changent d'option en passant par T réussissent en séance mais n'arrivent pas à investir pleinement cette réussite au post-test. C'est le cas de Fatih (élève de niveau faible) tandis que d'autres comme Valérie (élève de niveau moyen) concrétisent cette réussite en séance en un remarquable progrès pré-test/post-test.

D'autres suivent les conseils du professeur, commencent directement avec T et y restent, avec réussite comme Céline, ou sans réussite comme Marly.

Rares sont les élèves qui tentent des réponses directes. Se sentant incapables de fournir les bonnes réponses directement, ils renoncent à R. Ceci indique une différence avec le second cycle où la tendance à répondre directement, comme jeu simple ou jeu refuge, ou après évolution, a été remarquée. Cette différence peut résulter, en partie au moins, d'une différence au niveau du contrat ; séance notée dans un cas et séance ne faisant pas partie d'une évaluation dans l'autre, séance en liaison directe avec l'enseignement en cours d'une part, hors programme dans l'autre. En revanche, on remarque beaucoup plus d'instabilité cognitive au premier cycle.

Les résultats que nous venons de tirer de l'expérimentation en premier cycle sont à prendre avec beaucoup de précautions. Le progrès pré-test/post-test ne peut pas être imputé à la séance exclusivement. La correction du pré-test et l'utilisation des fiches de cours en séance peuvent amplifier l'écart entre les tests. Nous pouvons donc parler d'effet amplifié de la séance.

En revanche, au niveau méthodologique, cet effet qui bien qu'amplifié en premier cycle, comparé à l'effet au second cycle, est moins fort, nous permet de montrer certaines limites de l'apport de l'outil informatique à l'apprentissage :

1) La difficulté d'entrer dans le jeu pendant la séance en premier cycle - ce qui n'est pas le cas au second cycle - met en évidence comment même un enseignement officiel centré sur l'interaction algébrique-graphique ne rend pas nécessairement facilement manipulable le nouvel objet structuré droite-équation affine. Un temps de pratique avec cet objet semble nécessaire avant qu'il n'entre dans l'ensemble des objets mathématiques familiers de l'élève. Ce besoin de pratique montre l'intérêt possible de l'utilisation du logiciel dans un but de familiarisation. Ceci montre aussi la nécessité d'une séance de familiarisation avec le logiciel préalable au jeu.

2) Une situation particulière est, dans la plupart des cas (64%), un facteur déclencheur en second cycle, mais ne joue pas nécessairement ce rôle déclencheur en premier cycle. En second cycle parfois il suffit qu'une situation soit rencontrée pour qu'un début de sens des coefficients se développe et se stabilise très vite (Antoine, Igor, Xavier ...), ce que nous avons appelé phénomène de cristallisation . En premier cycle le pourcentage n'est que de (11 %) et plusieurs situations particulières passent parfois même sans être identifiées (Mickael rencontre 4 situations particulières qui restent apparemment sans effet). Ceci conduit à faire l'hypothèse que la familiarité avec les objets mathématiques joue un rôle dans la possibilité de phénomènes de cristallisation. Alan Schoenfeld et ses collègues ont aussi remarqué la rareté de phénomènes équivalents qu'ils ont qualifié de "learning events"dans le cas d'IN qui semble de niveau comparable à celui de nos élèves de troisième (cf. chapitre II).

3) On note un nombre moyen (4) d'exercices beaucoup plus faible qu'en second cycle, ce qui peut avoir contribué au manque d'effet puisque rares (18%) sont les élèves parmi ceux qui ont traité un petit nombre d'exercices (≤ 3) en séance, qui ont réussi au moins un exercice non particulier. Un seuil de nombre d'exercices traités pendant la séance semble nécessaire à la construction de connaissances en séance.

4) On note que les réussites tardives, donc non confirmées en séance, sont mal réinvesties ensuite au post-test (cas de Marly, par exemple). Ceci tendrait à montrer qu'il existe un effet de seuil sur le nombre de situations différentes réussies pour la stabilisation des connaissances construites en séance. Ceci montre aussi qu'une mise à l'épreuve des connaissances construites en séance semble nécessaire au réinvestissement de ces connaissances, comme au second cycle, en tâches papier/crayon. Ceci est compatible avec ce que nous avons écrit plus haut sur la fragilité des connaissances.
On constate également des réussites non réinvesties comme si les constructions de sens restant fragiles et faibles (cas de Celine).

5) Dans certains cas, des savoirs manifestés avec stabilité en séance sont restés non réinvestis en post-test. Le transfert des acquis de la séance au post-test n'est pas systématique comme c'est presque le cas au second cycle.

6) La réussite avec C même dans une séance relativement riche en exercices traités comme celle de Mickael ne conduit pas à un progrès pré-test/post-test. En premier cycle comme en second cycle, C apparaît comme un obstacle à l'apprentissage de l'articulation algébrique-graphique. Ceci est d'autant plus vrai en premier cycle que ce n'est que de C brut qu'il s'agit. En revanche, avec T on voit comment des élèves (Valérie, Céline, ...), lorsqu'ils arrivent à aborder la question par des essais, développent des procédures basées sur l'exploration qu'on peut supposer conjecturelle et construisent une capacité d'estimation de A remarquable.

Qu'apprend-on donc de cette expérimentation :

- **l'effet de la séance :** on note un effet remarquable mais beaucoup plus de regressions qu'en second cycle et donc corrélativement beacoup moins de phénomènes de cristallisation. On note aussi la fragilité des connaissances construites en cours de séance. La comparaison avec le second cycle nous permet de faire l'hypothèse sur l'existence d'un seuil de familiarité nécessaire pour permettre de tels phénomènes. Nous y reviendrons au chapitre VII.

- **le transfert** : le transfert des acquis de la séance au post-test n'est pas systématique comme c'est presque le cas au second cycle.

- **les stratégies :** les stratégies ponctuelles ne sont pas, comme au second cycle, des stratégies minoritaires, en revanche, comme au second cycle, lorsqu'elles permettent une réussite en séance les acquis ne sont pas réinvestis au post-test. Au contraire, les stratégies supposées basées sur l'élaboration des conjectures et leur test, comme en second cycle, favorisent l'apprentissage.

- **les processus** : les processus rencontrés ici sont également rencontrés au second cycle mais ils sont moins nombreux. D'ailleurs, les contextes déclencheurs sont ici, eux aussi, moins nombreux (sens de deux coefficients au lieu de 3, moins de cas pariculiers, pas de possibibilité de transfert d'un coefficient à un autre) et les possisibilités de progression, elles aussi, sont moins nombreuses.

CHAPITRE VII

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION. PERSPECTIVES.

Partant des hypothèses suivantes :

- l'élaboration de conjectures et l'étude de leur validité est un moyen privilégié d'exploration d'un domaine de connaissance nouveau et aide l'élève dans la construction de ses connaissances,

- l'outil informatique, grâce à ses capacités graphiques et calculatoires, ses capacités d'animation et de simulation, peut faciliter l'élaboration de conjectures et leur test,

- l'outil informatique, grâce à ses possibilités graphiques, est bien adapté à la mise en scène des phénomènes d'articulation entre registres de représentation algébrique et graphique des fonctions,

nous nous sommes intéressé dans notre recherche aux processus d'apprentissage possibles dans un environnement informatique, à l'analyse automatique en temps réel du travail de l'élève dans un tel environnement et aux problèmes qu'elle pose, notamment à travers les questions suivantes :

- Quel peut-être l'apport réel de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques dans le domaine de l'articulation des deux registres algébrique et graphique de représentation des fonctions ?

- Est-ce-que l'adaptation à un logiciel mathématique de type jeu dans ce domaine produit un apprentissage mathématique exploitable hors de cet environnement ? Si oui, quels types d'apprentissage sont possibles ? A quelles conditions et quels processus les sous-tendent ?

- Peut-on développer des instruments d'analyse susceptibles d'une automatisation en temps réel ? Si oui, ces instruments permettent-ils une analyse en termes de procédures, de conceptions, de connaissances... ?

Pour étudier ces questions, nous avons élaboré un logiciel de type jeu, adapté par sa paramétrabilité à nos objectifs de recherche. Nous avons ensuite analysé les savoirs mis en jeu dans les relations entre fonctions affines et droites (pour le premier cycle), entre fonctions polynomiales de degré 2 et paraboles (pour le second cycle) en introduisant, comme outil d'analyse, la notion de savoir atomique. Nous avons ainsi répertorié les principaux savoirs atomiques à la base des savoirs relationnels visés. Le logiciel a été expérimenté avec deux groupes d'élèves, l'un au collège et l'autre au lycée, qui ont travaillé individuellement avec le logiciel. Au collège, le domaine était nouveau, en cours d'enseignement, et la séance informatique est intervenue dans le cadre de cet enseignement. Au lycée, en revanche, le domaine n'était pas nouveau et la séance a constitué la seule intervention officielle sur le domaine. Nous avons testé les connaissances des élèves par rapport aux savoirs atomiques répertoriés avant et après leur travail avec le logiciel. Une étude a priori avait permis d'identifier des stratégies de travail possibles, mais ces dernières qui sont difficilement observables directement dans les travaux des élèves ont été regroupées au sein de tactiques, elles, reconnaissables automatiquement à partir des fichiers enregistrés pendant la séance.

Les résultats des tests ont été comparés et analysés en termes des savoirs atomiques. Les travaux en séance ont été étudiés, dans un premier temps, à partir de résumés automatiquement associés à chaque session élève et reliés aux résultats du pré-test et post-test. Points d'entrée dans l'analyse, ces résumés ont fait l'objet d'une analyse statistique globale regroupant trois méthodes de traitement informatique des données. Les convergences et divergences mises en évidence par cette analyse ont soulevé un certain nombre de questions et nourri l'analyse ultérieure plus approfondie de travaux désignés comme typiques par les résultats de l'analyse statistique. Ce retour aux fichiers a permis de mieux cerner les stratégies d'élèves, de pointer dans les protocoles des épisodes correspondant à la cristallisation de certaines articulations de registres et d'identifier certains facteurs les accompagnant. Une revue globale de tous les travaux a ensuite permis de tester la validité des hypothèses faites concernant les processus d'évolution repérés dans les fichiers typiques et de pointer certaines subtilités dans le fonctionnement de ces processus.

Quels résultats finalement ressort-il de l'ensemble de ce travail ?

1) L'EFFET DE LA SEANCE INFORMATIQUE

Tout d'abord, les données recueillies montrent sans ambiguïté l'effet positif de la séance informatique. Cet effet est particulièrement fort pour l'expérimentation en première et terminale, c'est-à-dire à un moment où l'articulation algébrique-graphique dont l'apprentissage est visé ici n'est plus enjeu officiel d'enseignement. Pour la quasi-totalité des élèves, au niveau du pré-test, cette articulation se limite au sens graphique du signe de A. Au post-test, cette articulation pour la plupart des élèves dépasse l'interprétation du signe de A pour atteindre celle de C, P, Q, R et S mais le sens de l'ordre sur A et l'association d'une parabole parmi plusieurs données graphiquement à une équation donnée restent, pour certains des élèves, des savoirs qui résistent à cette articulation. Les observations effectuées au pré-test montrent le désarroi des élèves face à des tâches qui leur semblent quasiment hors-contrat. Au post-test ces tâches ont visiblement pris du sens. Soulignons que cette prise de sens s'est opérée de façon indirecte, le jeu conçu pour la séance informatique n'obligeant pas a priori l'élève à raisonner explicitement en ces termes. L'effet, tout en étant sensible, est moins fort pour la classe de troisième et ce, bien que les tâches semblent ici dès le départ "normales" aux élèves.

Les expérimentations tendent donc à prouver que la conceptualisation de l'articulation algébrique et graphique de représentation des fonctions, résistante à l'enseignement usuel, est cependant susceptible de sauts qualitatifs importants via l'interaction de courte durée avec un environnement informatique mettant cette articulation en jeu ; ceci même dans le cas d'environnement peu didactifié comme celui exploité ici.
Elles tendent aussi à prouver que cet effet rapide n'est pas automatique et bien moins probable si les sujets concernés par l'articulation sont encore peu familiers avec les objets mathématiques concernés et ce, même s'il y a cohérence entre l'enseignement dispensé et les apprentissages visés comme c'était le cas ici. Nous reviendrons sur cette différenciation dans la partie de la conclusion concernant les processus d'évolution.

2) TRANSFERT DES ACQUIS EN SEANCE AU POST-TEST

En troisième, le transfert des acquis en séance au post-test n'est pas systématique comme au second cycle. En revanche, même au second cycle, il semble que le transfert concernant l'interprétation de l'ordre sur A soit plus problématique. Il existe des élèves qui

semblent apprendre en cours de séance à gérer les problèmes d'ordre. Ils arrivent en fin de séance notamment à ajuster A en 2 ou 3 coups et ces ajustements s'effectuent systématiquement dans le bon sens. Au post-test ils échouent pourtant à ordonner des paraboles données graphiquement en fonction des valeurs de A. Cette singularité nous semble didactiquement intéressante car elle tend à mettre en évidence une certaine spécificité de l'adaptation à l'environnement informatique utilisé. Tout se passe comme si, en séance, se construisait une capacité à gérer, au coup par coup, localement, des feed-back relatifs à l'ordre sur A, capacité soutenue sans doute par une familiarisation statique avec certaines ouvertures 1, -1, 2, -2, ..., notamment. Tout se passe aussi comme si cette adaptation conduisait à des prises de décisions pertinentes mais pouvait rester, pour certains élèves, une adaptation superficielle non ancrée sur des théorèmes en acte et invariants opératoires suffisamment puissants pour permettre le transfert à un contexte papier/crayon où la dynamique du jeu n'existe plus.
Il s'agit là bien sûr d'interprétations purement hypothétiques mais on y retrouve, formulés dans le langage de la théorie des champs conceptuels qui nous semble ici bien adapté, des éléments tout à fait convergents avec l'analyse hiérarchisée à trois niveaux de Schoenfeld et ses collègues (cf. chapitre II).

Il est clair que rien dans le logiciel utilisé et les conditions expérimentales n'engage l'élève vers la formulation (le logiciel est de type jeu et chaque élève est seul devant la machine par exemple). Donc rien ici ne joue le rôle de l'institutionnalisation même locale menée dans une classe dont les recherches didactiques ont clairement montré la nécessité. On peut penser qu'un environnement plus didactifié pourrait favoriser l'établissement de connexions plus profondes, le passage d'un fonctionnement intuitif et perceptif à un fonctionnement plus opératoire, des explicitations plus susceptibles de décontextualisation. Dans cette perspective, nous avons réalisé une version plus didactifiée du logiciel (cf. Annexe) mais le produit élaboré, même s'il permet d'intégrer certaines analyses validées par notre expérimentation dans son module analyse et offre la possibilité à l'enseignant de construire sa propre liste d'exercices, sans en laisser le choix au seul hasard, reste largement a-didactique. La greffe d'un tutoriel prenant en compte les dites analyses pour piloter le choix des exercices en temps réel et l'interaction élève/machine serait nécessaire maintenant pour construire un produit didactique plus efficace.

3) HIERARCHIE DES SAVOIRS

Les analyses faites par les chercheurs concernant l'articulation algébrique/graphique opposent souvent caractéristiques ponctuelles et caractéristiques globales, les premières étant présentées comme plus accessibles que les secondes. Dès le pré-test, les résultats obtenus à la fois en troisième et première/terminale ne confirment pas cette hiérarchie stricte. Ils mettent en évidence des relations plus subtiles entre savoirs ponctuels et savoirs globaux. Ainsi, au niveau du premier cycle, l'enseignement qui a mis l'accent sur les relations globales graphique-algébrique à propos des fonctions du premier degré, conduit à la hiérarchie suivante (par ordre de difficulté croissant) :

global simple < ponctuel < global complexe

Cette hiérarchie on la retrouve aussi au pré-test au second cycle où les savoirs concernés ne sont plus enjeu actuel d'enseignement.
Cette hiérarchie enfin se retrouve aussi globalement au post-test même si les écarts se resserrent et des différenciations disparaissent.

Pour essayer d'y voir plus clair, nous avons essayé de hiérarchiser a priori les savoirs atomiques concernés en fonction de leur difficulté, en utilisant différents critères : nombre d'objets en jeu, unités perceptives et symboliques en jeu, adéquation/non adéquation entre unités perceptives et unités symboliques, traitement ponctuel/global. Ces critères ne se recouvrent pas sur les savoirs atomiques considérés. Nous avons ensuite mis en rapport l'analyse effectuée et les réussites observées. La comparaison montre qu'il n'existe pas de critère qui joue de façon déterminante pour déterminer la difficulté effective d'un savoir. Ainsi la complexité des savoirs augmente en moyenne avec le nombre d'objets qui interviennent sans que ce critère joue de façon systématique. Il en est de même pour l'analyse en termes d'unités perceptives et symboliques et de leur articulation. Chaque critère apporte un éclairage distinct et significatif sur la complexité de l'association entre registres caractéristique des savoirs atomiques, d'où, en particulier, l'imbrication constatée entre savoirs ponctuels et globaux

Soulignons que les savoirs relatifs au coefficient B (dans P1), restent (ce qui est normal) les plus mal connus avant et après séance et que les savoirs sur C, qui sont parmi les plus mal connus au pré-test (ce qui est surprenant), occupent la position moyenne des savoirs ponctuels au post-test. Précisons enfin que cette hiérarchie signifie plus particulièrement que, pour chacun des coefficients impliqués (sauf B), on a du point de vue difficulté :

signe < taille < ordre

4) STRATEGIES

Nous avons observé une grande variété de stratégies développées par les élèves, alors que nous n'avons pas vraiment joué sur la paramétrisation possible du logiciel au cours de l'expérimentation. Ces stratégies ne sont pas équivalentes vis-à-vis de la réussite. L'analyse fine de fichiers typiques a permis de mieux préciser leurs caractéristiques. Elle tend aussi à montrer que l'élaboration de conjectures et leur test joue un rôle non négligeable dans les stratégies qui aboutissent à la réussite. Mais, si l'on considère les classes de première et terminale pour lesquelles nous disposons des informations les plus substantielles, il semble que, tout en se situant dans un rapport d'apprentissage à la situation, les élèves restent attirés par certaines caractéristiques du jeu et en particulier, dès qu'ils se sentent un peu sûrs, préfèrent tenter des réponses directes plutôt que d'assurer systématiquement les réponses proposées. Ainsi se développent et tendent à se stabiliser les stratégies gagnantes suivantes basées sur lecture-estimation sans calcul sauf dans le cas de P1:

- pour P1 : A est estimé, C est lu, et B est calculé à partir des coordonnées d'un point,
- pour P2 : A est estimé, P est lu et Q est lu,
- pour P3 : A est estimé, et R et S sont lus.

5) PROCESSUS D'EVOLUTION

Les résultats mettent en évidence un apprentissage. Nous avons essayé de repérer dans les fichiers enregistrés les processus d'évolution des connaissances qui les sous-tendent. Au niveau première/terminale, l'analyse a permis de repérer des épisodes que nous avons qualifiés d'épisodes de cristallisation des connaissances relatives à l'articulation. Ils constituent des micro-ruptures dans le fonctionnement de l'élève et la cristallisation correspondante est stable sur toute la suite de la séance. En revanche, en troisième, ces moments de cristallisation sont beaucoup moins fréquents. Alan Schoenfeld et ses collègues, eux aussi, ont souligné que, dans l'ensemble du travail de leur sujet IN (cf. chapitre 2), les moments qu'ils ont qualifiés de "learning events" sont rares. A nos yeux, cette différence est à relier aux différences des conditions expérimentales : pour les élèves de première et terminale, les objets traités sont des objets familiers, l'association entre fonctions et représentations graphiques, la manipulation de coordonnées sont des savoirs anciens et en un sens stabilisés ; pour les élèves de troisième, tout un réseau cognitif est au contraire en cours de constitution. Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène de cristallisation n'est pas, tout simplement, un signe de l'apparition d'un savoir complètement nouveau ; s'il y a un effet aussi brutal, c'est qu'il y a mise en connexion des parties du réseau déjà relativement bien constituées. Dans l'environnement informatique utilisé, le travail d'interaction graphique-algébrique sollicité dans un court laps de temps à plusieurs reprises, avec feed-back immédiat, permet à l'articulation, sans doute déjà ébauchée dans l'enseignement, de se souder. Le lien qui existait peut-être déjà conduisaitau plus à des connaissances mobilisables (cf. [Robert, 1988]), la connexion solide qui s'établit les rendant, au moins momentanément, disponibles. Si l'on fait donc l'hypothèse que des phénomènes de cristallisation, comme ceux observés, de par leurs caractéristiques (brutalité et stabilité) ne peuvent avoir lieu que lorsque l'ensemble du réseau cognitif sollicité est prêt, il est raisonnable de constater que ces phénomènes sont possibles en première, terminale, beaucoup plus rares en troisième. On peut penser, en revenant à la recherche précédemment citée, que le profil cognitif d'IN la rend plus comparable à nos élèves de troisième qu'à ceux de terminale. Ceci nous amène à une nouvelle hypothèse qui serait à tester dans une nouvelle expérimentation : pour les articulations droite-équation du premier degré, le niveau seconde serait peut-être le bon niveau pour obtenir cette efficacité optimale du logiciel via les phénomènes de cristallisation.

Nous avons essayé d'étudier les contextes de ces micro-ruptures et ceci nous a conduit à identifier un certain nombre de facteurs favorisant leur déclenchement. On peut citer comme facteurs déclenchants :

- la rencontre d'une parabole particulière,
- le repérage de points remarquables de la parabole,
- le passage par la forme P3.

Mais soulignons cependant, conformément à l'analyse ci-dessus, que ces contextes ne produisent pas systématiquement une micro-rupture puisqu'on a vu par exemple que :

- la rencontre précoce d'une situation particulière reste souvent sans effet,
- la rencontre d'une situation particulière trop simple n'a souvent qu'un effet local, ce qui tend à montrer que les progressions du "simple" au "complexe" ne sont pas forcément les plus efficaces pour l'apprentissage.
- le recours trop fréquent aux points remarquables n'a pas d'effet, en revanche un recours plus ponctuel a un effet global.

Ils ne sont pas non plus les seuls et par exemple certains feed-back "bizarres" ont parfois joué le rôle de facteur déclenchant.

Des phénomènes "inattendus" et "bizarres" qui n'ont pas été rencontrés en environnement d'enseignement traditionnel, attirent l'attention des élèves, suscitent leur curiosité et le besoin d'explication. Nous en donnons ci-après deux exemples :

1 - la demi-parabole P3 de coefficients (3, 6, - 24) que rencontre Olivier à l'exercice 8 (figure 7-1), qui attire l'attention sur le rôle de la valeur 6 dans le tracé,

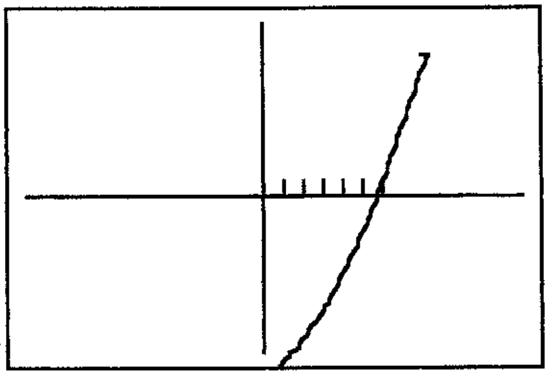


figure 7-1

2 - la parabole P3 de coefficients (2, -10, 12) réduite à quatre points de l'écran (figure 7-2), rencontrée par Igor dans l'exercice 1, suivie par les paraboles correspondant aux valeurs plus réduites : les paraboles P3 de coefficients (1, -5, 6) et (1, -2, 3), déclenchent un sens pour R et S.

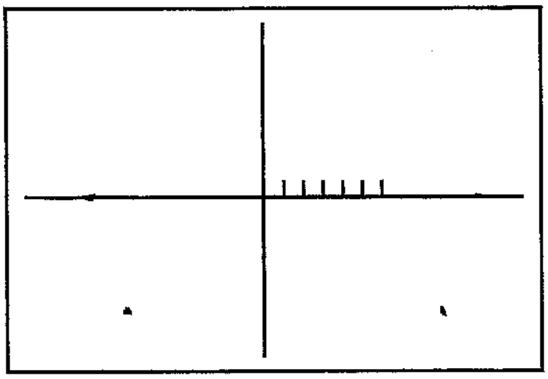


figure 7-2

Evidement, de tels phénomènes restent inaperçus ou difficiles à expliquer pour certains élèves. Pour Géraldine par exemple, le message "tracé hors écran", envoyé deux fois de suite, après les propositions successives : les paraboles P2 de coefficients (-3, 27, 213) et (15, 30, 501), est resté semble-t-il sans effet.

S'il est difficile de gérer ces phénomènes bizarres, on peut en revanche estimer qu'une version plus didactifiée du logiciel pourrait prévoir l'intégration des autres phénomènes dans des stratégies de tutorat.

6) L'ENREGISTREMENT ET LE TRAITEMENT AUTOMATIQUE DES DONNEES

L'enregistrement des interactions élève/machine, intégré au logiciel, nous a donné accès à des données "microscopiques" qui ont permis d'identifier des phénomènes (de cristallisation) difficilement perceptibles dans les environnements de recherche usuels. Il a aussi permis de nous rendre compte de la subtilité des conditions de progression qui ne semblent pas prises en compte dans l'enseignement usuel. Le traitement automatique des enregistrements a conduit à une analyse partielle en temps réel du travail de l'élève dans l'environnement du logiciel et pourrait permettre un pilotage de l'interaction élève/machine. En revanche, ces données posent de façon incontournable le problème de passage d'un niveau "microscopique" d'observation à des niveaux plus globaux de description en termes de schèmes, connaissances, conceptions, ... Ce passage, nous avons essayé de l'établir via la notion intermédiaire de savoir atomique et le regroupement ultérieur de ces savoirs atomiques en fonction des hiérarchies obtenues, ainsi que par l'association des tactiques observables à certaines successions d'actions logicielles et par le passage de ces tactiques à des stratégies de jeu.
Les résultats obtenus aux différentes phases du traitement des données montrent clairement que ce passage du microscopique au global n'a rien d'évident et ne pouvait être effectué sans recourir à une analyse fine des fichiers. Mais il nous semble ici que l'outil d'analyse des connaissances et stratégies que nous avons progressivement mis au point dans cette recherche est maintenant opérationnel et devrait permettre dans des recherches ultérieurs un premier niveau de traitement des données, automatisé et efficace à la fois, en y intégrant des critères temporels de test.

Cette recherche est bien sûr limitée : elle est limitée à un type précis de logiciel, à un domaine mathématique spécifique et elle ne concerne que de petits effectifs. Elle montre pourtant, nous semble-t-il, clairement que l'outil informatique bien géré, peut constituer une aide réelle à l'apprentissage. On peut penser que les apprentissages obtenus ici, pourraient l'être sans environnement informatique dans le cadre de l'enseignement usuel. Nous ne le nions pas. Nous voudrions cependant insister sur l'intérêt que peut présenter pour l'enseignement un produit logiciel dont on sait que, sous certaines conditions, il permet de façon autonome pour l'élève de prolonger et achever certains apprentissages scolaires dans une interaction de courte durée, l'enseignant gardant via le module de "dialogue" le contrôle des situations didactiques construites, l'information sur leur effet étant apportée par le module "analyse" qui permet de rendre compte de l'évolution des connaissances de l'élève sur des savoirs précis lors de son interaction avec le logiciel.

Cette recherche nous a également permis de formuler des hypothèses sur les mécanismes de certains apprentissages et certaines spécificités par rapport au fonctionnement dans les environnements usuels papier/crayon.
Elle a aussi montré l'effet "déclencheur" que peut jouer un environnement informatique pour des élèves déjà familiarisés avec les objets mathématiques mis en jeu par le logiciel.
Elle a montré enfin, de façon ponctuelle, comment la familiarité construite via de tels environnements peut conduire à une amélioration nette des capacités d'estimation du coefficient directeur d'une droite ou de l'ouverture d'une parabole, ce qui semble indiquer la mise en place de rapports à ces objets différents de ceux construits dans un environnement papier/crayon.

Il ne s'agit bien sûr là que d'hypothèses qui demanderaient à être confirmées par une expérimentation à plus grande échelle. De plus, de nombreuses questions se greffent naturellement sur cette recherche et restent ouvertes. Les directions suivantes nous semblent particulièrement importantes :

1) évaluer la qualité des connaissances construites dans l'environnement informatique via leur transférabilité :
- à d'autres types de fonctions dans le même environnement informatique,
- à d'autres tâches papier/crayon mettant en jeu registre algébrique et registre graphique plus éloignées que celles du test,
2) étudier l'effet à long terme, pour les mêmes types de fonctions, de la séance informatique,
3) étudier l'optimisation de l'environnement construit via le pilotage des variables de commande du logiciel ou l'organisation didactique de l'environnement,
4) étudier les similarités et dissimilarités existant entre processus d'apprentissage dans un environnement traditionnel et les processus identifiés par notre recherche.

On peut s'y attaquer par divers types de travaux :

- comparer l'effet du travail sur des listes d'exercices préparées et conçues en fonction des résultats obtenus à celui sur des exercices tirés au hasard comme c'était le cas ici,
- évaluer l'effet du travail sur des fonctions polynômes à celui portant sur de fonctions d'un autre type, comme par exemple des fonctions trigonométriques,
- étudier l'effet de dispositifs expérimentaux favorisant l'explicitation, par exemple organiser un travail par binômes, les élèves devant se mettre d'accord avant de proposer une option ou une réponse,
- étudier l'effet de différentes tarifications des options sur le développement et l'évolution des stratégies,
- comparer l'effet du travail en environnement informatique sur les compétences sur des tâches simples et traditionnelles à celui en situation traditionnelle.

Enfin, au delà de ces questions précises, se pose la question plus globale d'un pilotage efficace de l'interaction élève/machine. Dans cette optique un des prolongements naturels de cette recherche consisterait à définir et élaborer un environnement EIAO du logiciel construit qui, analysant en temps réel les états de connaissance, les stratégies des élèves et leur évolution, reliant ces analyses à certains profils types, permettrait un choix intelligent des activités proposées et des messages explicatifs renvoyés à l'élève.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

Artigue M., (1989) : Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire, Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Ed. IMAG Grenoble, pp 183-209.

Artigue M., 1990 : Nombres complexes, approche historique et didactique, IREM Paris 7.

Artigue M., (1991) : Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique, petit x, N° 27, Ed. IREM Grenoble.

Artigue M., (1992) : Functions from an algebraic and graphic point of view, cognitive difficulties and teaching practices, in Aspects of Epistemology and Pedagogy, G. Harel & E. Dubinsky Ed., MAA notes, vol. 25, p. 109-132.

Brousseau G., (1986) : Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I.

Chauvat G., Pouget M. H., (1992) : Fonctions polynômes du second degré, Etude de la correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique. Communication personnelle des auteurs.

Chauvat G., (1992) : Le logiciel ORGE, un instrument pour l'enseignement des représentations graphiques cartésiennes et pour l'étude des phénomènes didactiques associés. Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université de Grenoble I.

Chevallard Y., (1989) : Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel,

Clement J., (1985) : Misconceptions in graphing. Actes de la 9ème conférence internationale de P. M. E., Vol. 1, pp. 369-375. Utecht, The Netherlands.

Dahan-Dalmedico A. et J. Peiffer, (1986) : Une histoire des mathématiques : routes et dédales, Paris, Le Seuil, Coll. Points-Sciences.

Davis R. B., (1982) : Teaching the concept of function : Method and reason. In C. V. Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), Conference on functions (Report 1, pp 47-55). Enschede, The Netherlands : Foundation four Curriculum Developpement.

Douady R., (1984) : Jeu de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.Thèse d'Etat. Université Paris 7.

Douady R., (1986) :Jeux de cadres et dialéctique outil-objet, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7.2, pp.5-31.

Dreyfus T. & Eisenberg T., (1984) : Intuitions on functions. Journal of Experimental Education, 52, pp. 77-85.

Dreyfus T. & Eisenberg T. (1987) : On the deep structure of functions. Actes de la 11ème Conférence internationale de P. M. E., Montréal, Vol. 1, pp. 190-196.

Dreyfus T. & Halevi T. (1988) : QuadFun - a case study of a pupil computer interaction. Actes de la 12ème Conférence internationale de P. M. E. Wezsprem, 1988.

Dubinsky E., Hawks J., Nichols D. (1989) : Development of the process of function by-pre-service teachers in a discrete mathematics course. Actes de la 13ème Conférence internationale de P. M. E. Paris, Vol. 1, pp. 291-298.

Dubinsky E., (1992) : Utilisation de l'ordinateur à partir d'une théorie de Piaget sur l'apprentissage des concepts mathématiques, L'ordinateur pour enseigner les mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot, pp. 237-270, Paris.

Dugdale S., (1982) : Green globs : A microcomputer application for graphing of equations. Mathematics Teacher, 75, pp. 208-214.

Dugdale S., (1984) : Computers in mathematics education in 1984 Yearbook of the National Council of Teatchers of Mathematics, pp. 82-88, Reston, VA : National Council of Teatchers of Mathematics.

Duval R., (1988) : Graphiques et équations. Annales de Didactiques et de sciences Cognitives, Vol. I, pp 235-253, IREM Strasbourg.

Gras R., (1979) : Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objets didactiques en mathématiques, Thèse d'Etat, Université de Rennes I.

Gras R., Boisnard D., Allen R., Nicolas P., Trilling L. (1988) : Gestion Informatisée de problèmes et de Démarches Liées à leur Résolution. Université de Rennes I. Actes de la 12ème Conférence internationale de P. M. E. , Wezsprem, 1988 et Nouvelle Encyclopedie Diderot, P.U.F., Janvier 1992.

Guzman-Retamal I., (1990) : Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction. Thèse de doctorat, IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Herscovics N., (1982) : Problems related to the understanding of functions, In G. V. Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), Conference on functions (Report 1, pp 67-84). Enschede, The Netherlands : Foundation four Curriculum Developpement.

Imagiciels Mathématiques Seconde, ministère de l'Education nationale, DLC, CREEM (CNAM) et IREM, Paris 7. 1990

Janvier C., (1978) : The interpretation of complex cartesian graphs representing situations, Studies and teaching experiments. Thèse de doctorat. Département de Mathématiques. Université du Québec, Montréal.

Janvier C., (1981) : Difficulties related to the concept of variables presented graphically. Actes de la 5ème conférence internationale de P. M. E., Grenoble.

Janvier C., (1987) : Translation Processes in mathematics education, In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in mathematics learning and problem solving (pp. 27-31), Hillsdale, NJ : Laurence Erlbaum Associates.

Lakatos I., (1984) : Preuves et réfutation. Traduction française de Balachef N. et Laborde C., Hermann, Paris, 1984.

Larher A., (1991) : Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique. Thèse d'Université, Rennes I.

Leinhardt G., Zaslavski O., & Stein M. K. (1990) : Functions, Graphs and Graphing : Tasks, Learning, and Teaching, Review of Educational Research, spring 1990, Vol. 60, n° 1, pp. 1-64.

Lermann I.C., (1981) : Classification et analyse ordinale des données. Dunod.

Markovits Z., Eylon B., & Bruckheimer M.(1986) : Fonctions today and yesterday, For the Learning of Mathematics, 6(2), 18-28.

Nadot S., (1990) : Représentations grahiques et études de fonctions, Les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère, Une approche par la programmation informatique d'un traceur de courbes. Thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris.

Piaget, 1975 : L'équilibration des structures cognitives, Paris, PUF.

Picard M., Braun G., (1987) : Les logiciels éducatifs, PUF, "Que sais-je ?", n° 2377.

Robert A., (1988) : Reflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels, cahier didactique des mathématiques n°51, IREM Paris 7.

Schwartz J. L. & Yeushalmy M. (1989) : The visualising algebra, Sundurst Communications, Pleasantville, NY 10570.

Schwarz B., (1988) : The triple representation model curriculum for the function concept. Actes de la 12ème Conférence internationale de P. M. E., Wezsprem.

Schoenfeld, A., (1988) : Mathematics, technology, and higher-ordered. In R. S. Nickerson & P. P. Zodhiates (Eds.), Technology and education in 2020 (tentative title). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld A., Smith J., Arcavi A. (1990) : Learning. The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. Advances in Instructional Psychology (volume 4). R. Glaser (Ed).

Sfard A., (1989) : Transition from operational to structural conception the notion of function revisited, Actes de la 13 ème conférence internationale, Paris, Vol. 3, pp. 151-158.

Sierpinska A., (1988) : On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points.

Tall D., (1986) : Building and Testing Cognitive Approach to the Calculus using Interacive Computer Graphics, Thèse, University of Worwick.

Tall D., (1992) : L'enseignement de l'analyse à l'âge de l'informatique, L'ordinateur pour enseigner les mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot, pp. 158-182, Paris.

Tréhard F., (1987) : Logiciels pouvant impliquer des activités matématiques à l'école élémentaire, typologie et enjeux didactiques, Thèse d'Etat, Université Paris 7.

Vergnaud G., (1991) : La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques, Vol.10/2.3, pp 133-169, La pensée sauvage.

Vinner S., (1983) : Concept Definition, Concept Image and the notion of function. Int. J. Math. Educ. Sci.Technol..., Vol. 14, N° 3, pp. 293-305.

Yerushalmy M., (1989) : The use of graphs as visual interactive feedback while carrying out algebraic transformations. Actes de la 13ème Conférence internationale de P. M. E. Paris, Vol. 3, pp. 252-260.

Youschkevitch, A. (1981) : Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle, Fragments d'histoire des mathématiques, pp. 7-68, A. P. M. E. P. n° 41.

Zehavi N., Gonen R., Omer S., & Taizi N. (1987) : The effects of microcomputer software on intuitive understanding of graphs of quantitive relationships. Actes de la 11ème conférence internationale de P. M. E., Vol. 1, pp. 255-261, Montréal.

ANNEXE A

LE LOGICIEL VERSION "ENSEIGNEMENT"

LE LOGICIEL VERSION "ENSEIGNEMENT"

I) INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu, pour les besoins de la recherche, nous avons conçu un logiciel d'enseignement visant l'articulation entre registres algébrique et graphique de représentation de fonctions. Nous avons développé la version expérimentale de ce logiciel, qu'on peut qualifier d'a-didactique. Comme nous l'avons souligné aussi, un de nos objectif est d'obtenir à partir de cette version une autre plus didactifiée destinée à l'enseignement. Nous espérions donc pouvoir aboutir, à partir de la construction didactique du logiciel, et en prenant en compte des résultats de l'expérimentation de la version expérimentale ainsi que les résultats de notre recherche, à une réalisation mieux adaptée à l'attaque plus efficace des difficultés liées au domaine visé. Les résultats de l'expérimentation qui montrent l'effet positif et l'efficacité du logiciel nous ont conforté dans notre projet qui a débouché sur la nouvelle version baptisée "Fonctuse". C'est cette version que nous présenterons dans cette annexe.

"Fonctuse" est basé sur les principes fondamentaux de construction de la version expérimentale et prend en compte les variables mises en jeu dans cet environnement. Des améliorations suggérées par les observations lors de l'expérimentation et les résultats de la recherche, tant sur le plan didactique que sur le plan ergonomique, ont été apportées au logiciel. En plus, cette version intègre les analyses du travail de l'élève présentées dans le chapitre IV, en vue d'un traitement automatique de ce travail, en temps réel, à partir des informations recueillies en cours de séance. C'est une version P. C., elle permet donc de mieux profiter des capacités d'un ordinateur personnel pour éviter, en particulier, des problèmes matériels liés au nano-réseau et les contraintes qui nous ont été imposées, signalés dans le chapitre III. Elle répond aussi aux besoins logiciels qu'a nécessités l'évolution des équipements d'établissements scolaires.
Précisons que cette version n'exploite cependant, ni les résultats de la recherche concernant les stratégies identifiées et leurs rapports aux apprentissages, ni ceux qui mettent en évidence certains processus d'apprentissage, en vue d'une identification automatique du profil de l'élève et d'une interaction adaptée à ce profil.

Avant de présenter cette version, nous allons indiquer ses principales caractéristiques.

II) CARACTERISTIQUES

Nous allons préciser parmi ces caractéristiques celles qui sont présentes dans la version expérimentale et celles qui ne le sont pas.

II-1) CARACTERISTIQUES ANCIENNES

a) **la tâche** : une courbe est tracée, il s'agit de trouver son équation sous une forme déterminée.

b) **le type de fonction** : il s'agit de fonctions du premier et du second degré et les types d'expression sont :

$$P0 : y = a\,x + b$$

$P1 : y = a\,x^2 + b\,x + c$
$P2 : y = a\,(x - b)^2 + c$
$P3 : y = a\,(x - b)\,(x - c)$

c) **la validation de la réponse** : il s'agit d'une validation partielle algébrique (coefficient par coefficient) et d'une validation globale graphique.

d) **le type de repère** : il s'agit d'un système centré d'axes perpendiculaires.

II-2) CARACTERISTIQUES NOUVELLES

a) **le type de réalisation informatique** : le langage de programmation est le langage C++ et le système d'exploitation est WINDOWS.

b) **le type d'interface** : l'affichage à l'écran se fait au moyen des "menus déroulants" et les choix de l'utilisateur peuvent être effectués par l'utilisation d'une "souris".

c) **le type de repère** : les coefficients, désignés par des lettres minuscules (pour éviter les confusions entre coefficient et point qui sont apparues lors de l'expérimentation au premier cycle), sont de type entier compris entre -20 et +20 et la région repérée du plan de l'écran est définie par les points (x ; y) où $x \in [-n ; n]$, $y \in [-m ; m]$ et m et n sont des entiers entre 1 et 20 qui peuvent être choisis par l'élève. Celui-ci peut munir le repère d'une grille si elle a été autorisée par l'enseignant lors de la paramétrisation de la séance.

d) **le type de fonction** : les fonctions homographiques d'expression
$P4 : y = (a\,x + b)/(c\,x + d)$

e) **la présence simultanée des tracés** : sur demande, l'élève peut afficher les trois derniers tracés.

f) **le chronométrage automatique** : lors du traitement d'un exercice, le temps mis sur chaque action est enregistré.

g) **le type du capital** : deux types de capital sont possibles : capital aux coups et capital aux points.

h) **le type de session** : une session de travail est préparée au préalable par l'enseignant. Cette session peut être libre, imposée ou de type liste. Si elle est libre, ses exercices de type P0, ..., P4, seront choisis au hasard par la machine en séance. Si elle est imposée, ses exercices de types imposés parmi P0, ..., P4, seront choisis au hasard par la machine en séance. Si elle est de type liste ses exercices seront construits par l'enseignant.

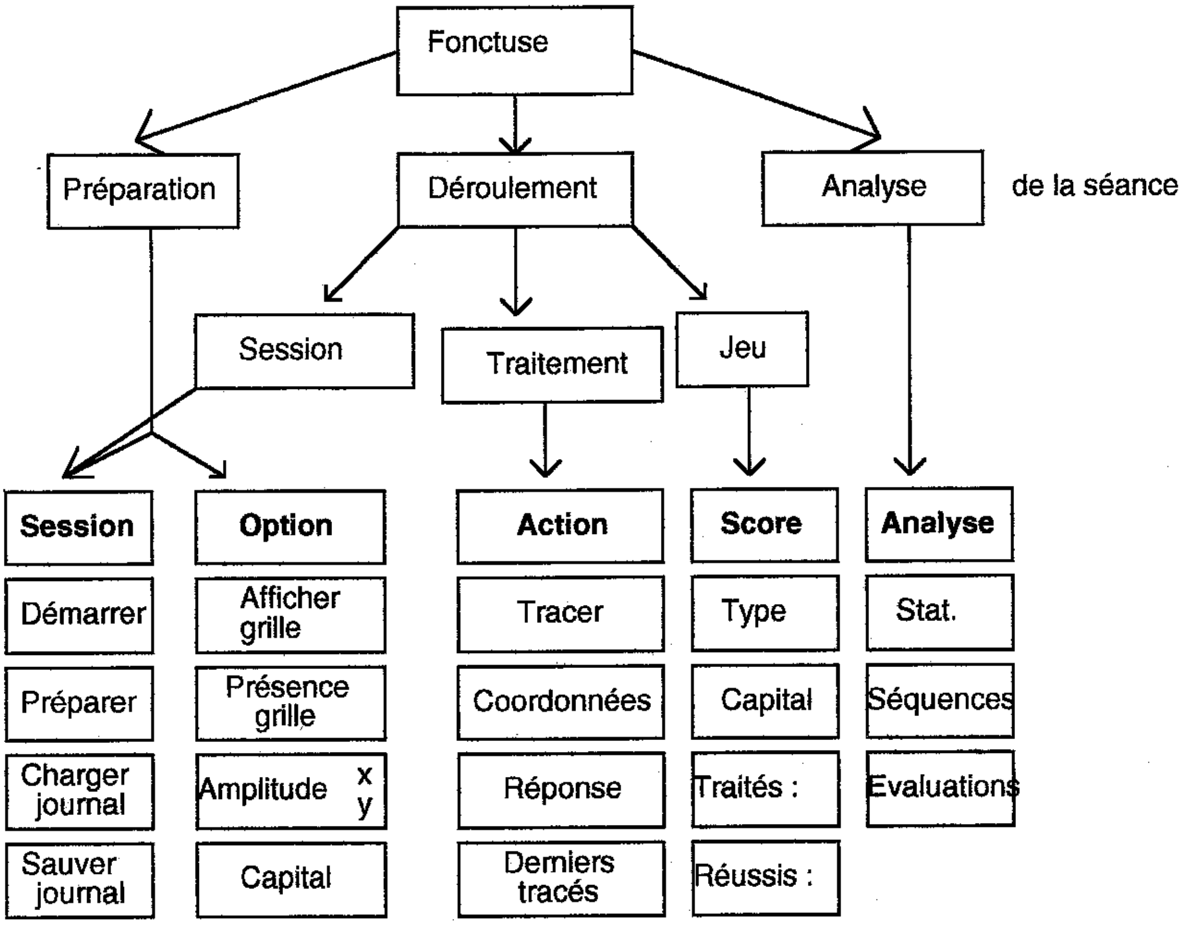
i) **un aide-mémoire** : les dernières valeurs proposées par l'élève sont conservées et peuvent être consultées.

j) **un historique de la séance** qui montre la succession des exercices, les actions et les temps associés.

k) **l'analyse automatique** : cette analyse conduit, en temps réel, à des graphiques pour chaque type montrant pour chaque coefficient l'évolution des connaissances manifestées en séance.

III) PRESENTATION

"Fonctuse" est formé de trois modules : le module "préparation de la séance", le module "déroulement de la séance" et le module "analyse de la séance". Le schéma suivant constitue une description globale du logiciel. La partie inférieure comprenant la ligne en gras constitue la ligne menu principale et les menus déroulants correspondant aux fonctions principales.



Le module "préparation de la séance" permet à l'enseignant de préparer la suite d'exercices, d'autoriser ou d'interdire la grille et de décider du type de capital. Le module "déroulement de la séance" permet à l'élève de gérer cette séance et de conduire le traitement des exercices. Il permet aussi à l'élève de disposer d'informations sur l'état du score (type du capital, capital restant, nombre d'exercices traités, nombre d'exercices réussis). Le module "analyse de la séance" permet à l'élève et à l'enseignant d'avoir des statistiques sur la séance (nombre d'exercices traités et nombre d'exercices réussis de chaque type ainsi que leur globalisation). Il fournit pour la séance un schéma codant l'alternance des types, les réussites et les échecs, les actions logiciel et les temps séparant chaque action par exercice. Il fournit aussi des graphiques "évaluations" représentant l'évolution du sens de la taille du signe et éventuellement de l'ordre relatifs à chacun des coefficients.

Dans le but d'une utilisation simplifiée du logiciel, cette modularité interne n'est pas visible à l'écran. La figure 1 montre l'écran principal. Le menu principal propose cinq fonctions : Session, Option, Action, Score et Analyse.

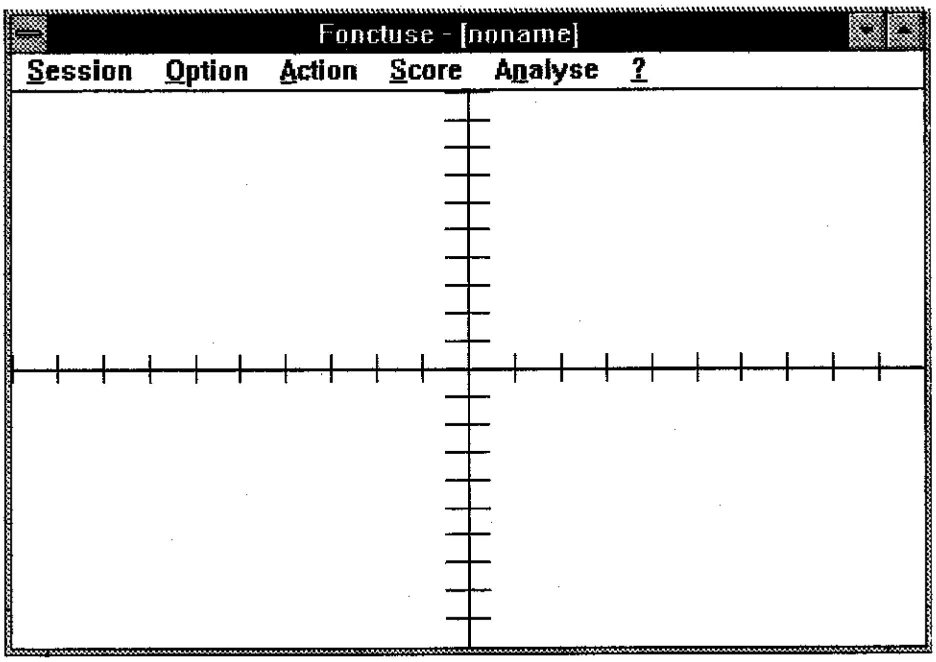


Figure 1

L'activation d'une de ces fonctions conduit à un menu déroulant. Le schéma de la structure du logiciel présenté ci-dessus montre les menus associés à ces fonctions. Ils se trouvent en-dessous de la ligne menu principal.

Donnons une description rapide des principales options de chacune de ces cinq fonctions :

1) **Session** : permet de "démarrer" une session en chargeant une des sessions déjà préparées, de "charger" ou "sauver" un journal. Un journal étant un fichier qui contient toutes les informations recueillies automatiquement pendant la session. La sauvegarde se fait naturellement en fin de session et le chargement est normalement préalable à l'analyse du travail.
Cette fonction permet aussi de "préparer" une session. Pour cela il faut tout d'abord choisir le type de la session : libre, imposée ou liste. Dans le cas où la session est libre, les exercices seront choisis au hasard lors de la séance et seront des types retenus pour la session parmi P0, ..., P4. La figure 2 indique le choix de P0 et P1 comme types retenus dans une session libre.

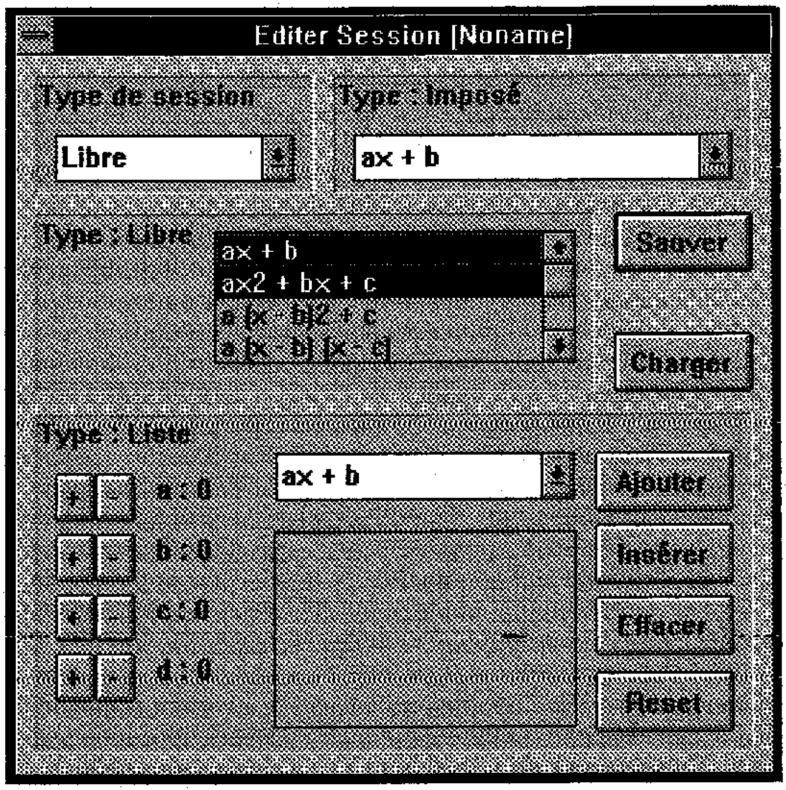


Figure 2

Dans le cas où elle est imposée, il faut préciser le seul type d'équation parmi P0, ..., P4 autorisé.

Dans le cas où la session est de type liste, il faut construire cette liste exercice par exercice. La figure 3 montre le choix du premier exercice de la liste. Il est de type P3 :$y=a(x-b)(x-c)$ et les valeurs choisies $a = -2$, $b = -1$ et $c = 3$ ont été fixées, par une succession d'incrémentations ou de décrémentations d'une unité chacune, à partir de la valeur initiale : zéro, en cliquant avec la souris autant de fois que nécessaire sur le côté "+" ou le côté "-" du bouton associé au coefficient.

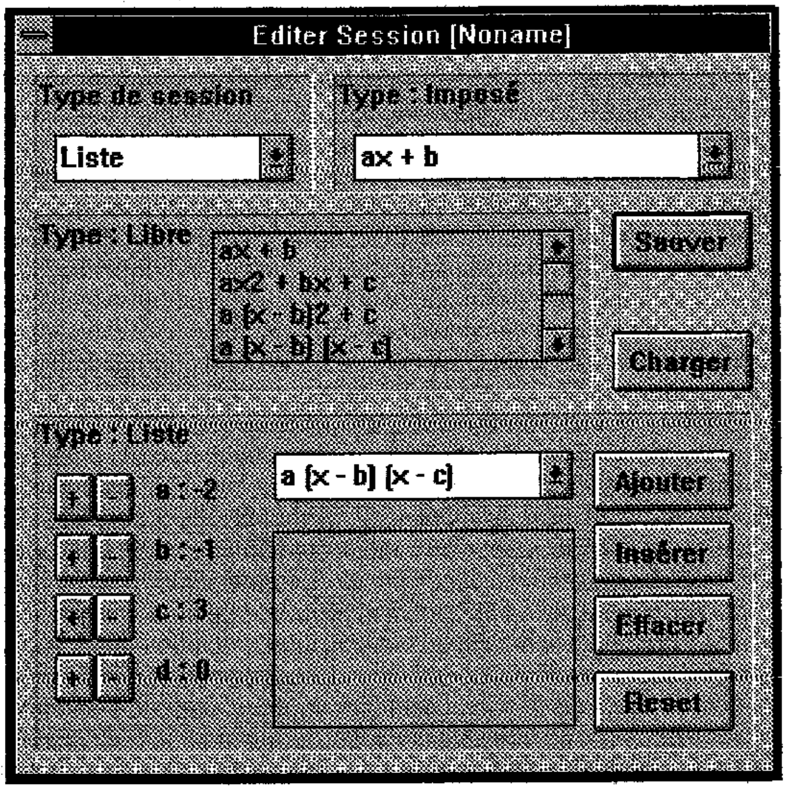


Figure 3

Il est possible de construire une liste à partir d'une autre déjà existante. Il suffit alors de "charger" cette liste et d'effectuer sur elle des opérations prises parmi : "effacer", "ajouter" et "insérer".

2) **Option** : permet d'une part à l'enseignant d'interdire ou d'autoriser la grille ainsi que décider du type de capital, d'autre part à l'élève d'afficher la grille et de modifier les amplitudes des axes.

3) **Action** : permet effectivement de traiter l'exercice. L'action "tracer" permet de tracer une courbe du même type que celle de l'exercice en choisissant avec la souris les valeurs des coefficients. Pour illustrer le fonctionnement de cette fonction, nous allons prendre l'exemple de l'exercice de la figure 4 où il s'agit de trouver l'équation de type P1 de la parabole tracée à l'écran.

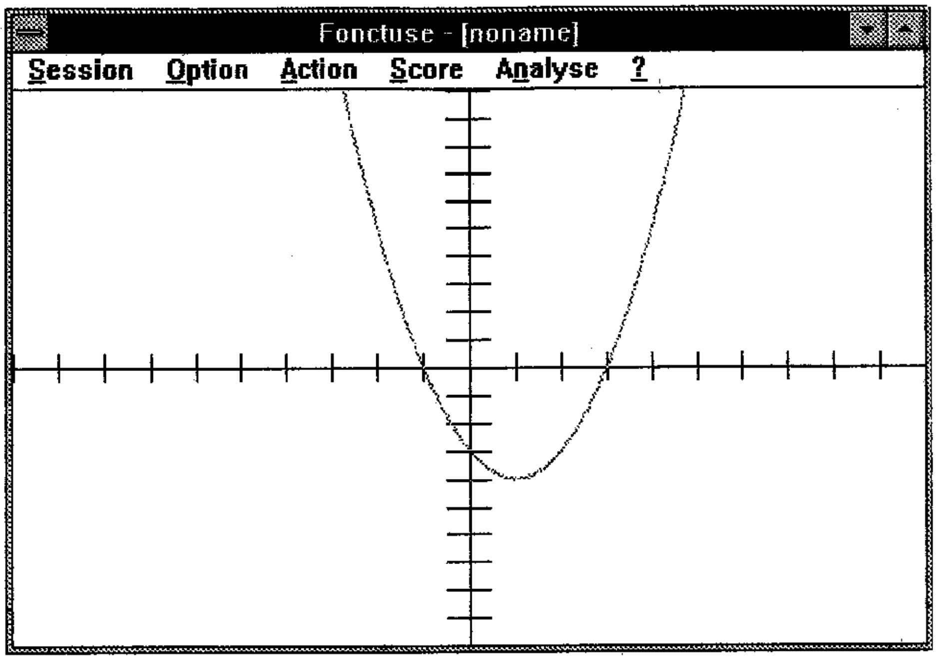


Figure 4

Les figures 5 et 6 montrent, le choix de $y = - x^2 + 4 x - 3$ pour "tracer" et le tracé correspondant.

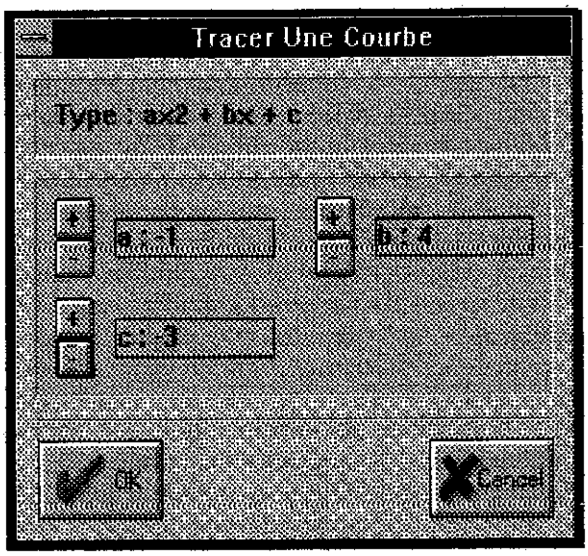


Figure 5

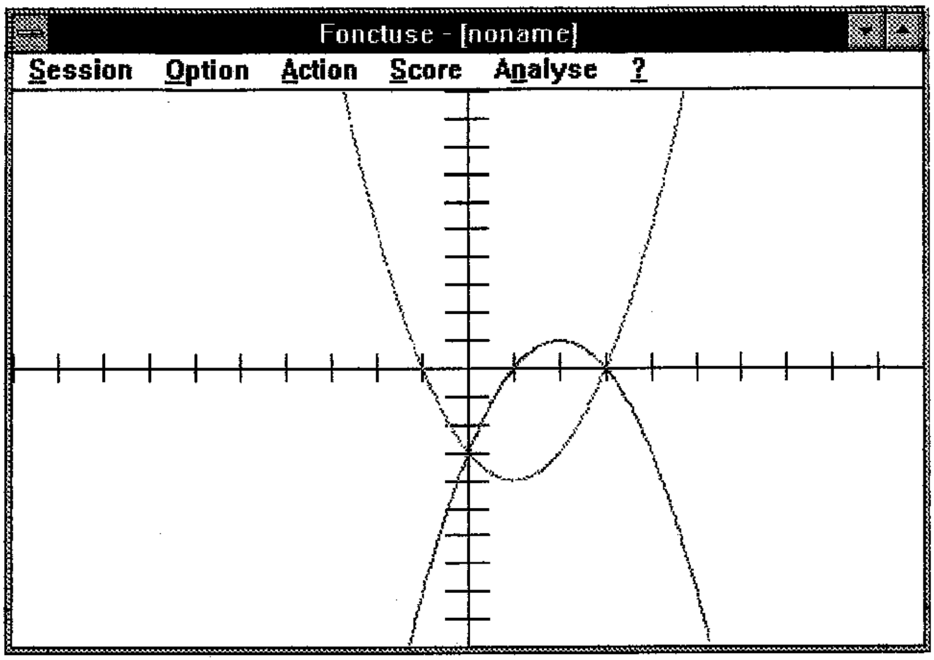


Figure 6

L'action "réponse" permet de proposer une réponse (de la même façon que "tracer") et de suivre la validation algébrique et la validation graphique. Les figures 7 et 8 montrent respectivement, la validation partielle des coefficients et le tracé correspondant, dans le cas de la réponse $y = x^2 + 3x - 2$, de type P1, proposée pour la parabole de la figure 2.

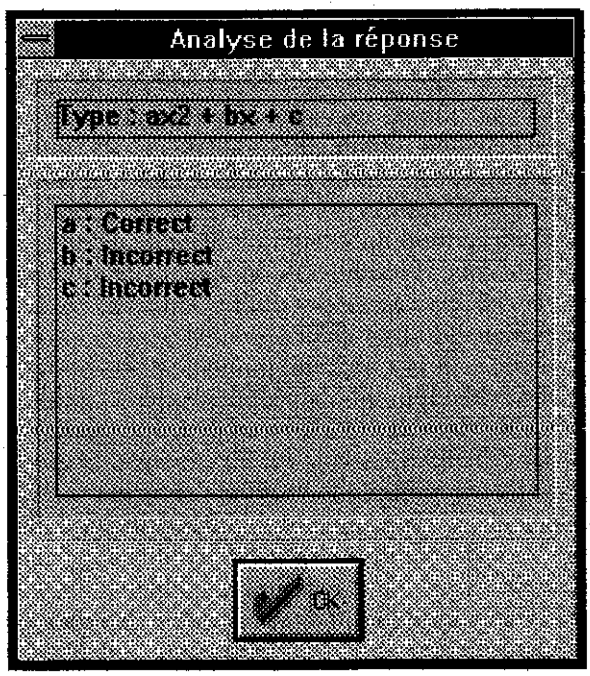


Figure 7

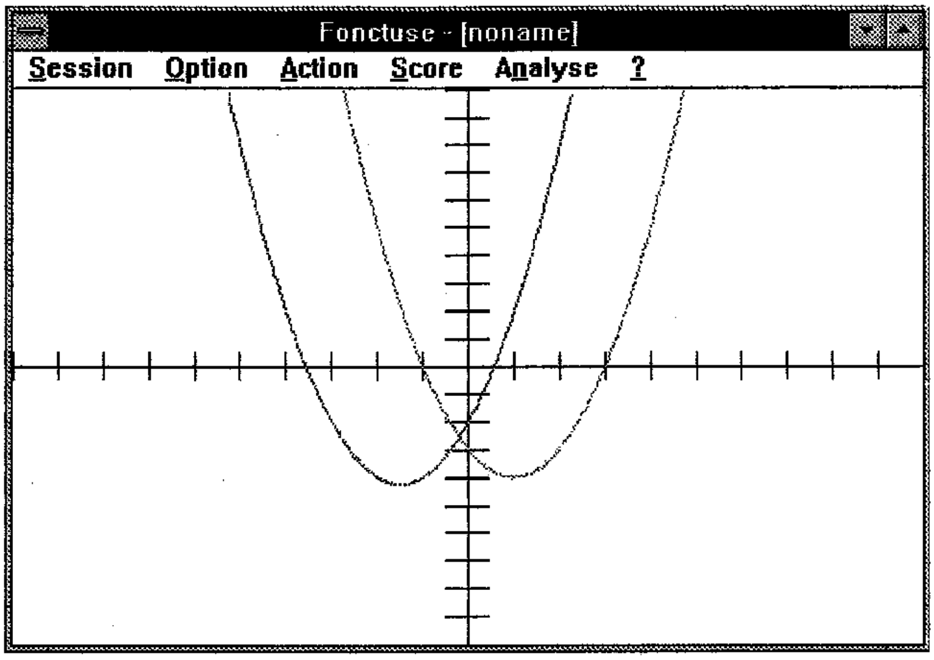
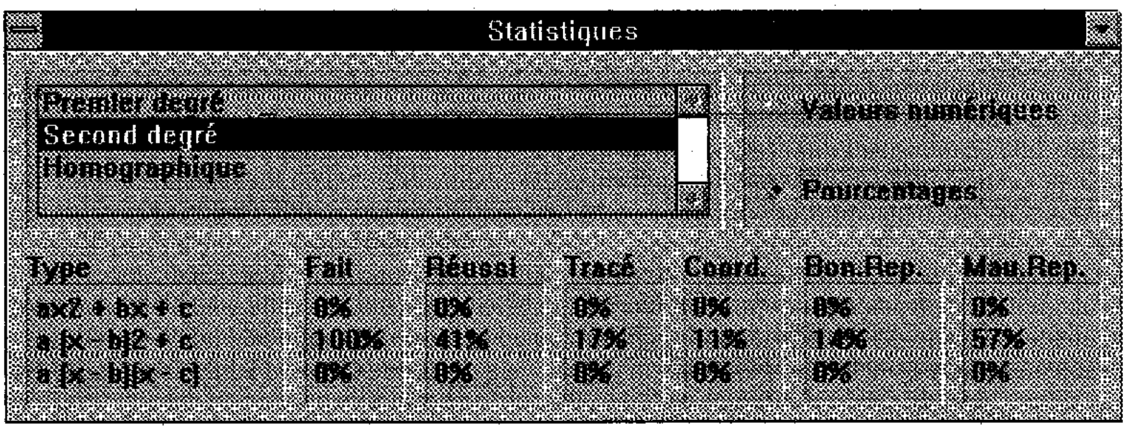


Figure 8

L'action "Coordonnées" permet d'afficher les coordonnées d'un point de la parabole donnée. Il suffit de cliquer sur le point voulu. Enfin, l'action "Derniers tracés" permet d'afficher les trois derniers tracés qui ont été proposés par les actions "Tracer" ou "Réponse".

4) **Score** : permet de suivre l'état du score par affichage du type de capital, de sa valeur actuelle, du nombre d'exercices traités et du nombre d'exercices réussis.

5) **Analyse** : permet d'avoir des statistiques globales sur la séance, un historique de la séance ainsi qu'une évaluation du travail en montrant l'évolution des connaissances manifestées sur chacun des coefficients.
Nous allons illustrer cette présentation de l'analyse par l'analyse du travail de l'élève Paul lors d'une séance de 12 exercices de type P2 : $y = a\,(x - b)^2 + c$. Pour un exercice, le nombre de coups permis est 4.
La figure 9 montre les statistiques globales de la séance.



Type	Fait	Réussi	Tracé	Coord.	Bon.Rep.	Mau.Rep.
ax2 + bx + c	0%	0%	0%	0%	0%	0%
a (x - b)2 + c	100%	41%	17%	11%	14%	57%
a (x - b)(x - c)	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Figure 9

La figure 10 montre les actions effectuées lors du traitement de l'exercice 1 accompagnées du temps écoulé depuis le début de l'exercice.

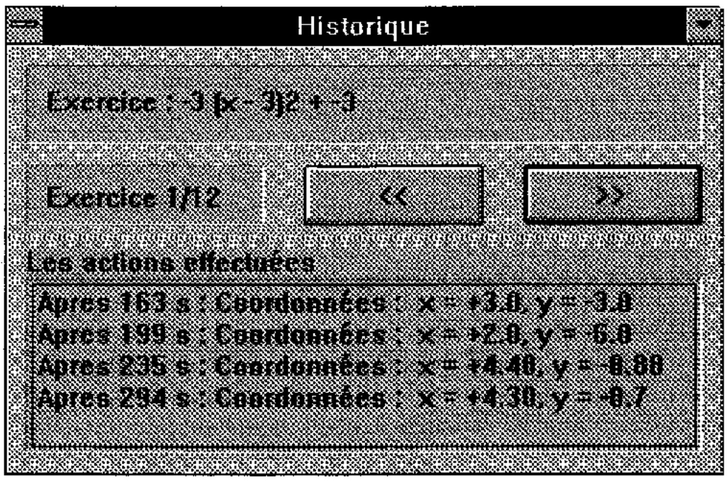


Figure 10

Les exercices de 2 à 12, traités dans la séance, avec les actions et leurs temps sont :

<u>Exercice 2</u> : $2 (x - - 4)^2 + 1$

après 56 secondes, Tracé : $2 (x - 1)^2 + -3$
après 117 secondes, Tracé : $1 (x - 1)^2 + 3$
après 195 secondes, Tracé : $-3 (x - -2)^2 + 0$
après 240 secondes, Tracé : $4 (x - -2)^2 + 1$

<u>Exercice 3</u> : $- 2 (x - 0)^2 + -3$

après 39 secondes, Tracé : $1 (x - 1)^2 + -3$
après 90 secondes, Mauvaise réponse : $3 (x - 1)^2 + -5$
après 158 secondes, Mauvaise réponse : $5 (x - 1)^2 + -1$
après 216 secondes, Tracé : $-2 (x - 0)^2 + -2$

<u>Exercice 4</u> : $1 (x - - 4)^2 + 1$

après 32 secondes, Mauvaise réponse : $1 (x - 1)^2 + -3$
après 114 secondes, Mauvaise réponse : $- 3 (x - 0)^2 + 1$
après 158 secondes, Mauvaise réponse : $2 (x - 1)^2 + -3$
après 199 secondes, Mauvaise réponse : $1 (x - -2)^2 + 3$

<u>Exercice 5</u> : $-2 (x - 1)^2 + 2$

après 59 secondes, Mauvaise réponse : $1 (x - -2)^2 + 0$
après 94 secondes, Mauvaise réponse : $- 1 (x - 3)^2 + -1$
après 136 secondes, Mauvaise réponse : $- 2 (x - 1)^2 + -2$
après 199 secondes, Mauvaise réponse : $- 2 (x - 1)^2 + 5$

Exercice 6 : $1 (x - 2)^2 + -3$

après 31 secondes, Mauvaise réponse : $2 (x - 1)^2 + 0$
après 85 secondes, Mauvaise réponse : $5 (x - -1)^2 + -3$
après 141 secondes, Mauvaise réponse : $1 (x - 0)^2 + -3$
après 185 secondes, Mauvaise réponse : $1 (x - 4)^2 + -3$

Exercice 7 : $-2 (x - -4)^2 + -1$

après 84 secondes, Mauvaise réponse : $- 1 (x - -2)^2 + 1$
après 119 secondes, Mauvaise réponse : $-3 (x - 0)^2 + -1$
après 171 secondes, Mauvaise réponse : $- 2 (x - 4)^2 + -1$
après 271 secondes, Mauvaise réponse : $- 2 (x - -2)^2 + -1$

Exercice 8 : $-3 (x - 1)^2 + -2$

après 25 secondes, Mauvaise réponse : $-1 (x - 1)^2 + -2$
après 64 secondes, Bonne réponse : $-3 (x - 1)^2 + -2$

Exercice 9 : $-3 (x - 1)^2 + 2$

après 45 secondes, Mauvaise réponse : $-2 (x - 1)^2 + 2$
après 85 secondes, Bonne réponse : $-3 (x - 1)^2 + 2$

Exercice 10 : $1 (x - 1)^2 + 1$

après 60 secondes, Bonne réponse : $1 (x - 1)^2 + 1$

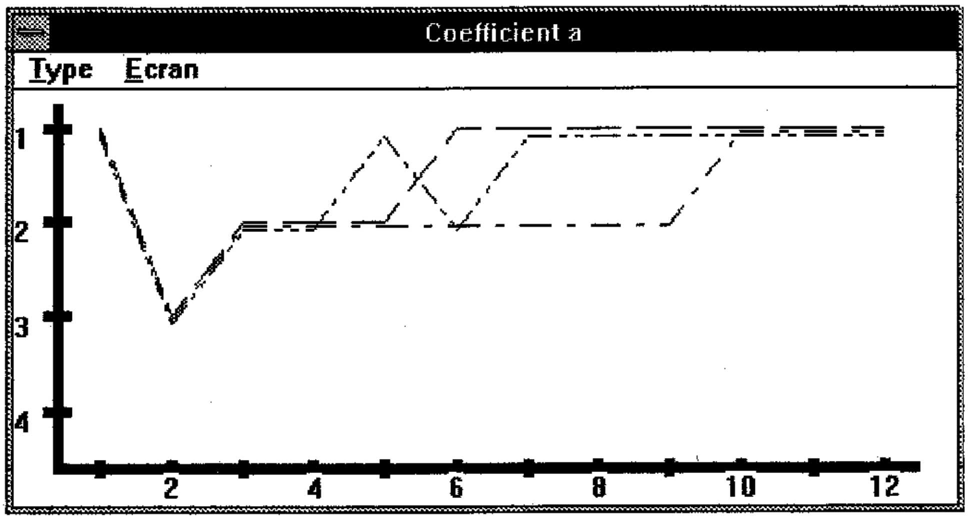
Exercice 11 : $-3 (x - 0)^2 + -1$

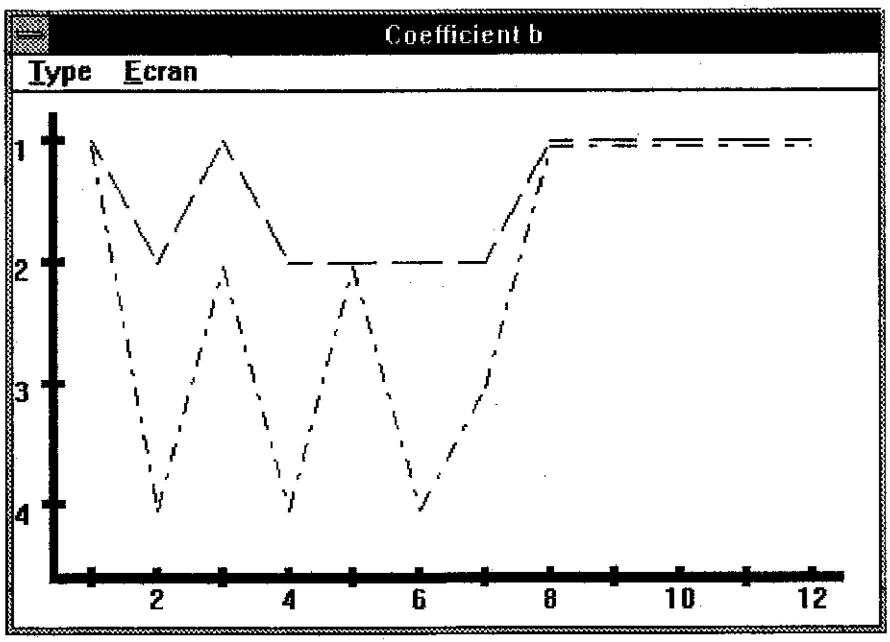
après 70 secondes, Bonne réponse : $-3 (x - 0)^2 + -1$

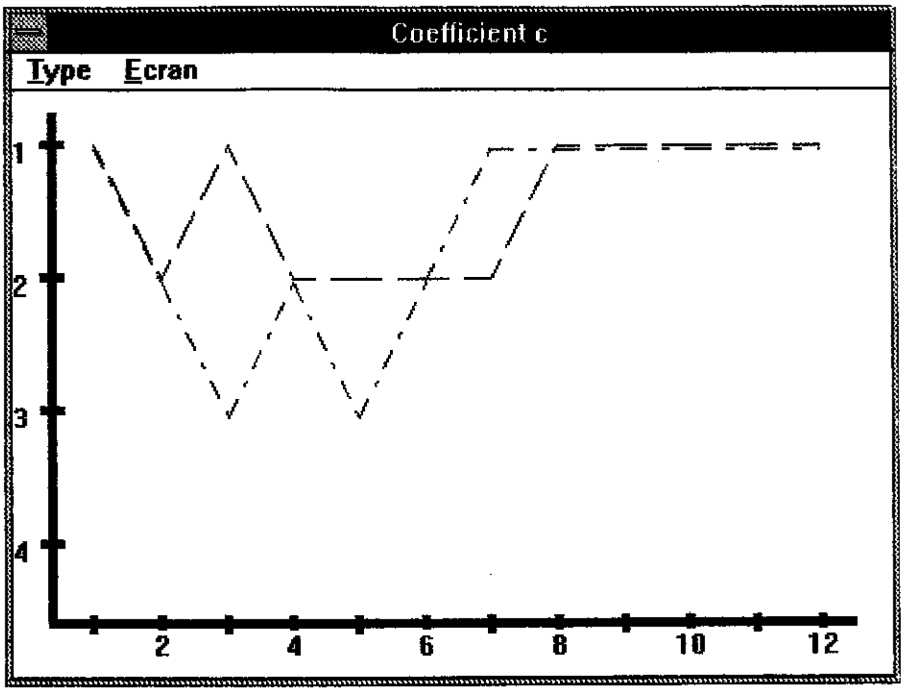
Exercice 12 : $-2 (x - -3)^2 + -5$

après 80 secondes, Bonne réponse : $-2 (x - -3)^2 + -5$.

L'analyse donne les graphiques suivants sur l'évolution des connaissances manifestées sur les coefficients a, b et c. Dans ces graphiques le graphe tracé avec -- -- -- montre l'évolution du sens associé au signe du coefficient, le graphe tracé avec -- - -- montre l'évolution du sens associé à la taille du coefficient et celui tracé avec -- - - -- montre l'évolution concernant l'ordre.


Coefficient a
Type Ecran
1
2
3
4
2
4
6
8
10
12

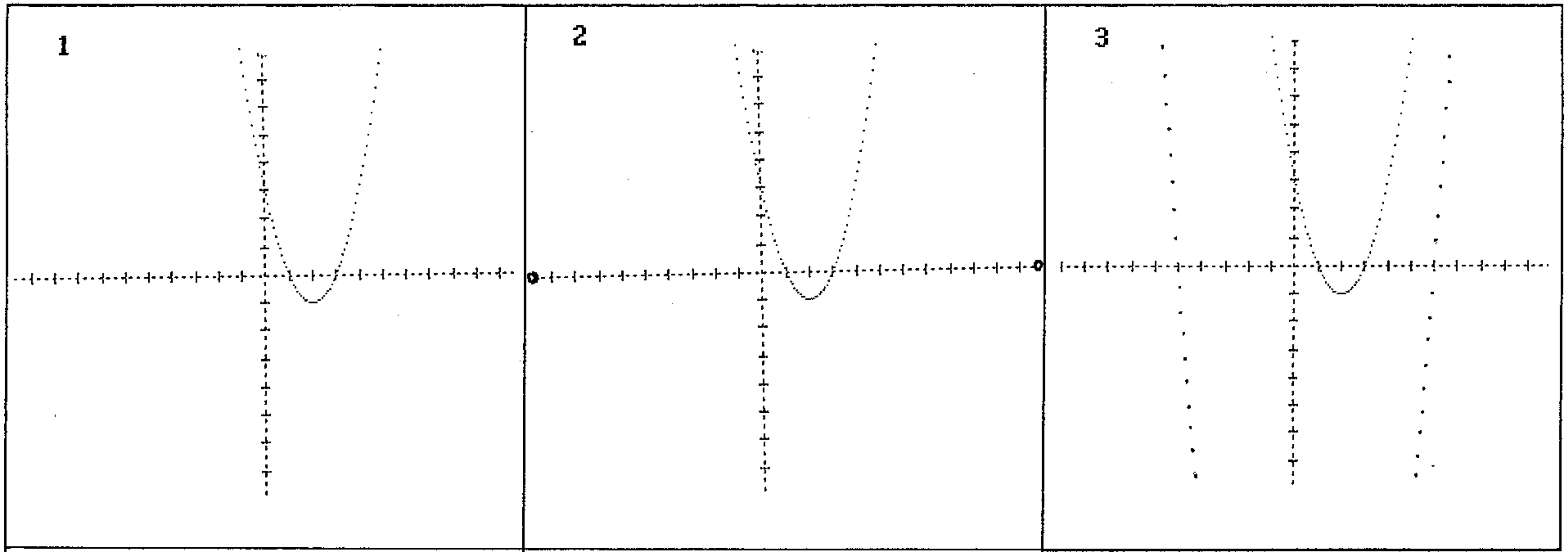

Coefficient b
Type Ecran
1
2
3
4
2
4
6
8
10
12

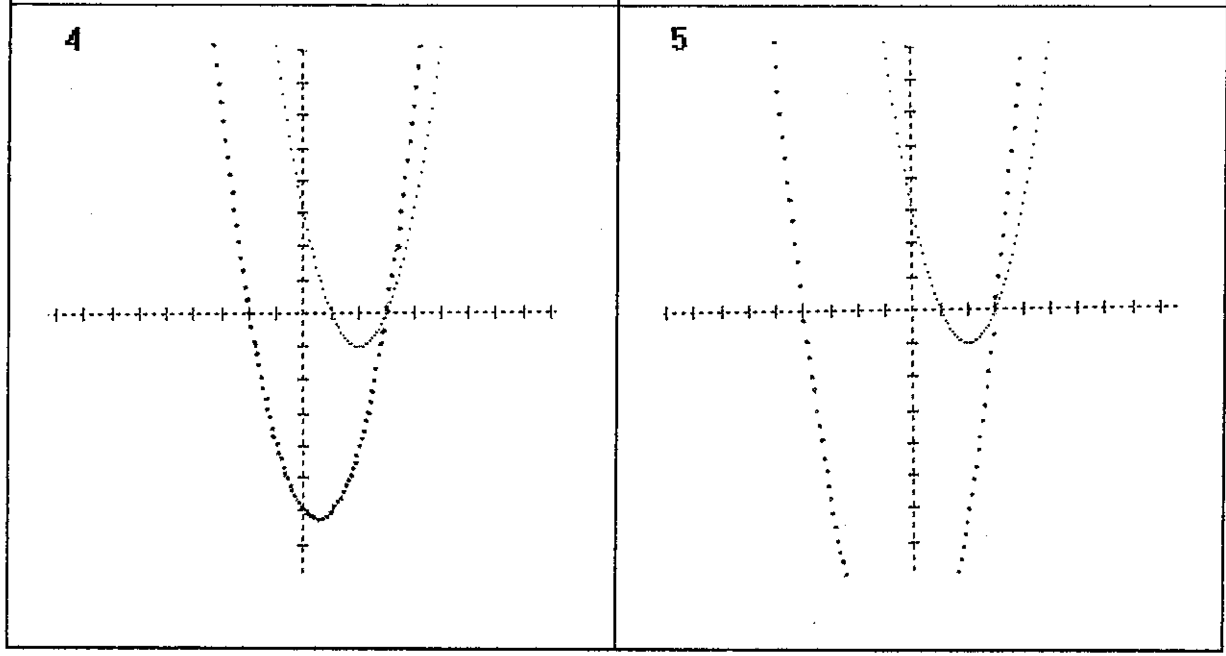

Coefficient c
Type Ecran
1
2
3
4
2
4
6
8
10
12

ANNEXE B

DES RECOPIES D'ECRAN

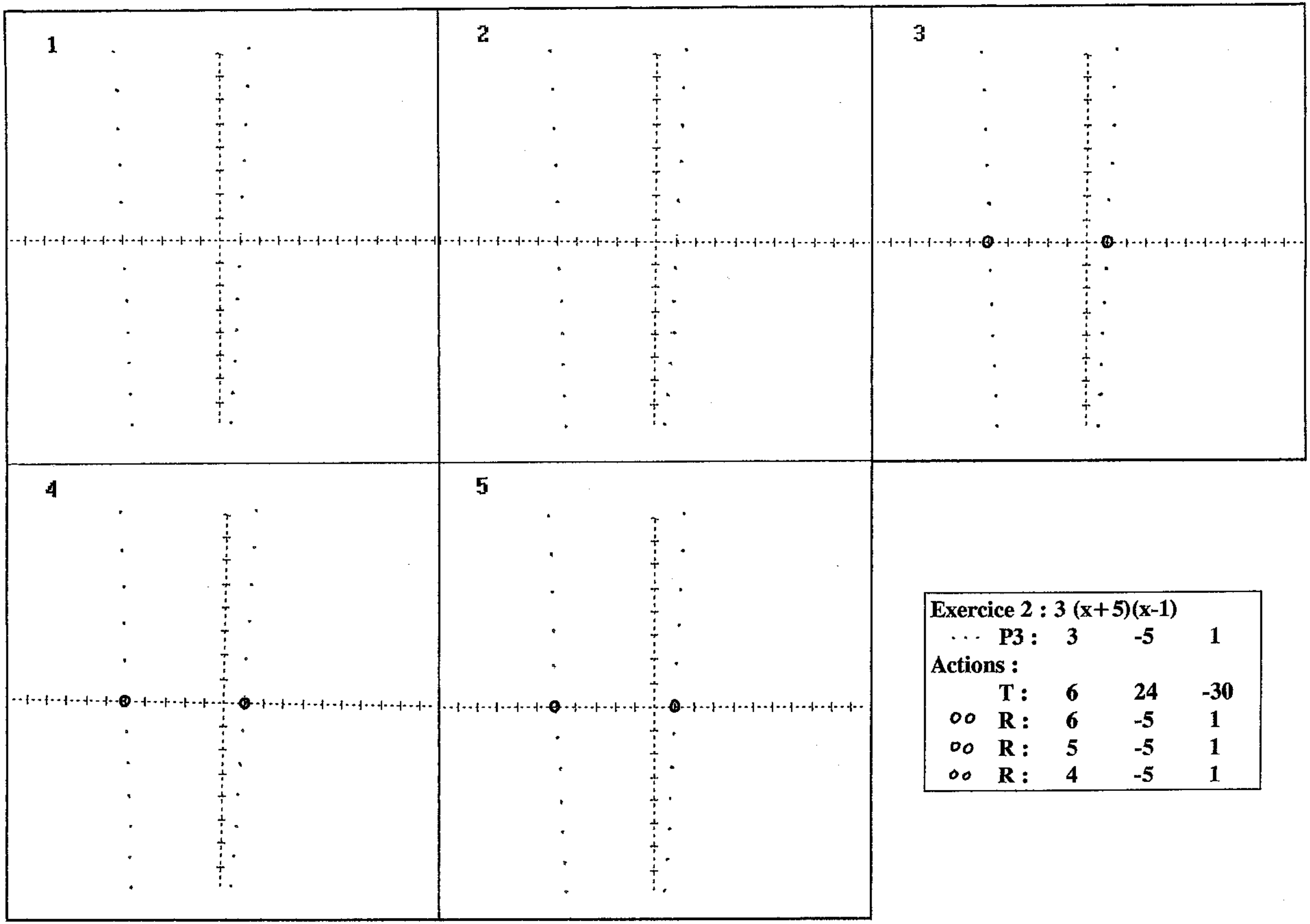
RECOPIES D'ECRAN DE LA SEANCE D'IGOR





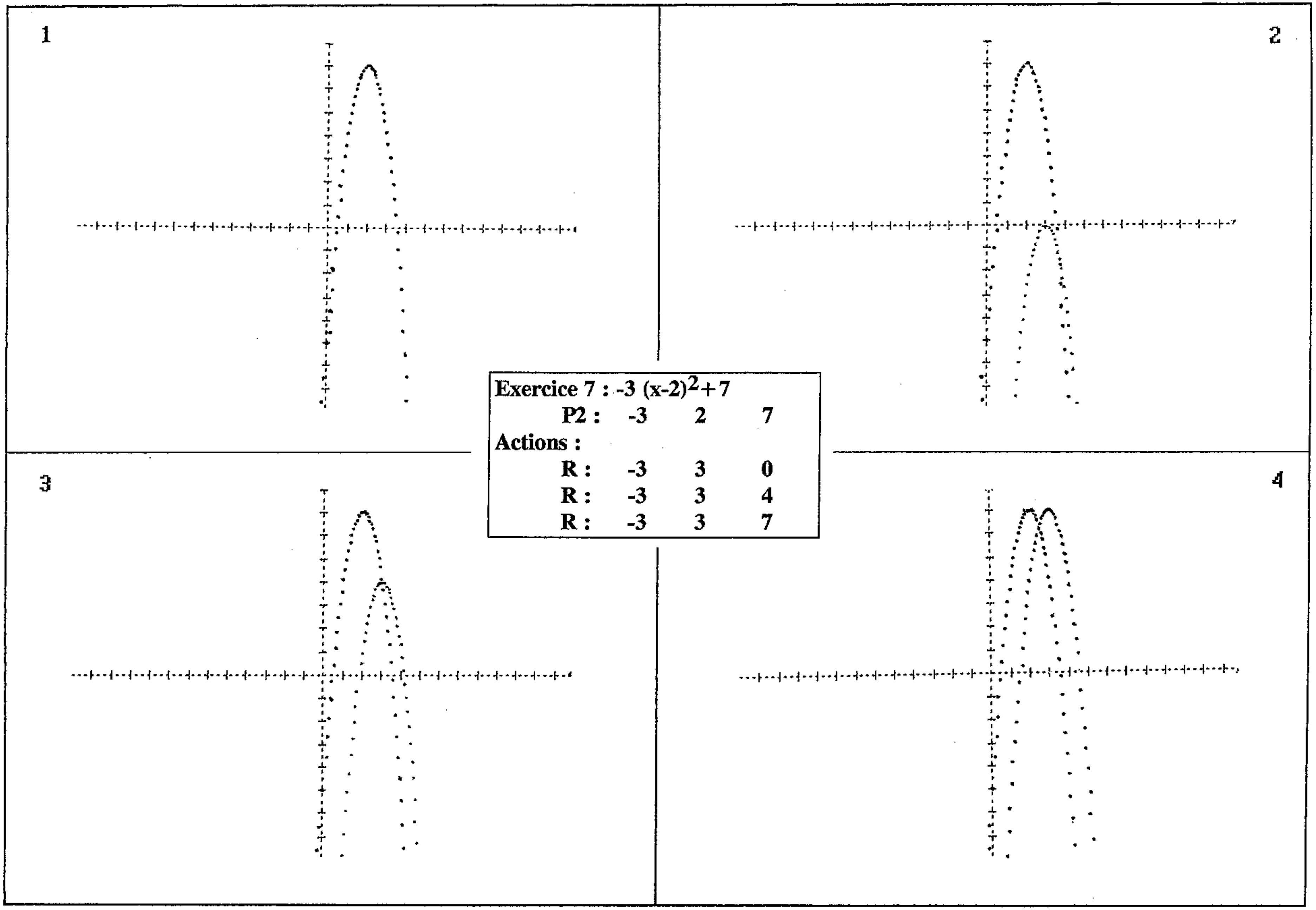
Exercice 1 : 1 (x-1)(x-3)

	P3 :	**1**	**1**	**3**
Actions :				
o o	**T :**	**2**	**-10**	**12**
	T :	**1**	**-5**	**6**
	T :	**1**	**-2**	**3**
	T :	**1**	**-4**	**3**



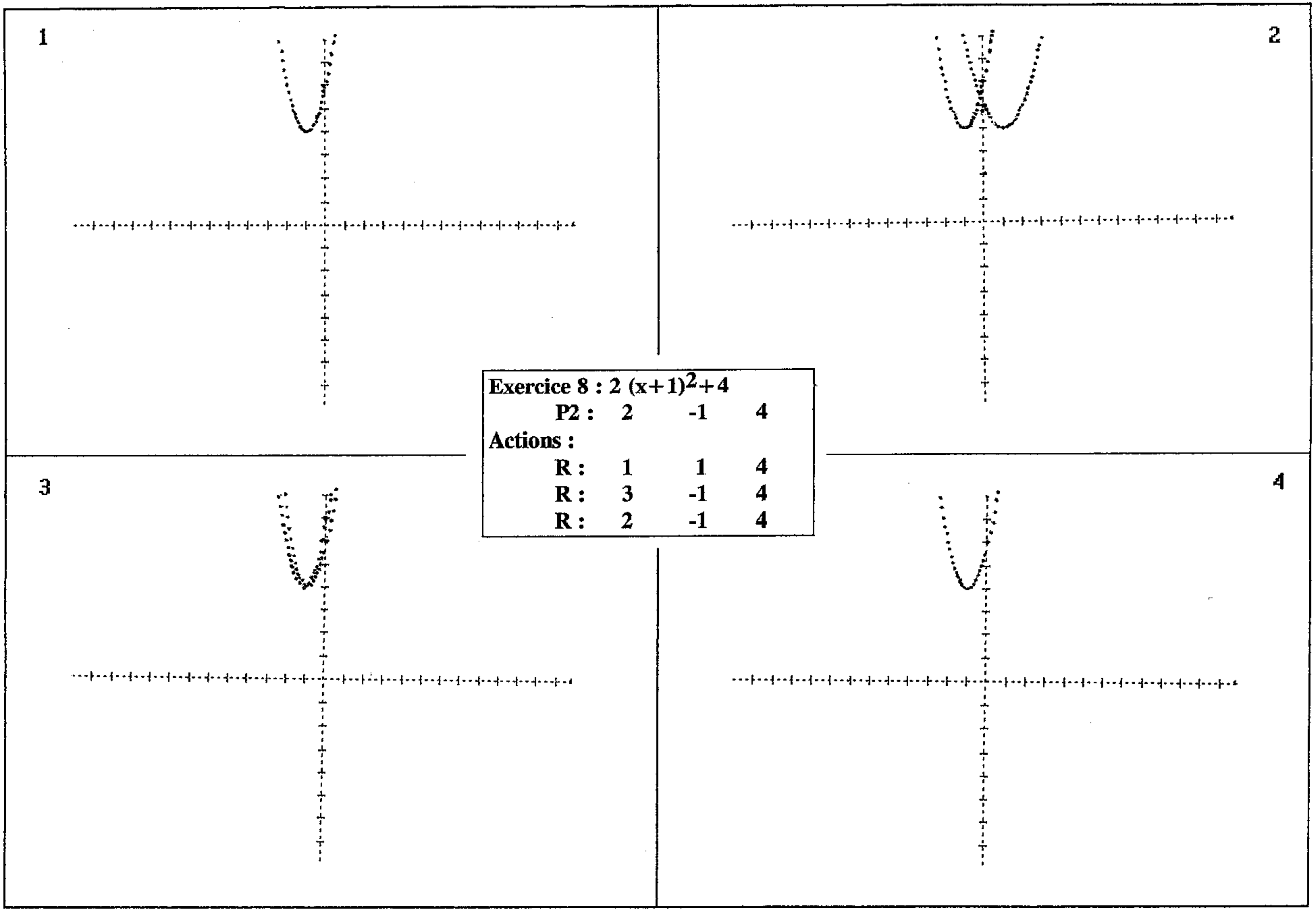
Exercice 2 : 3 (x+5)(x-1)

···	P3 :	3	-5	1
Actions :				
	T :	6	24	-30
oo	R :	6	-5	1
oo	R :	5	-5	1
oo	R :	4	-5	1

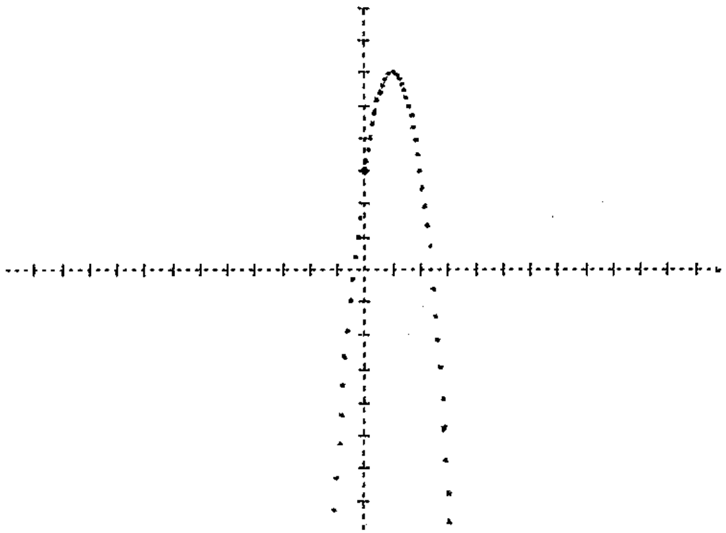


Exercice 7 : $-3\,(x-2)^2+7$

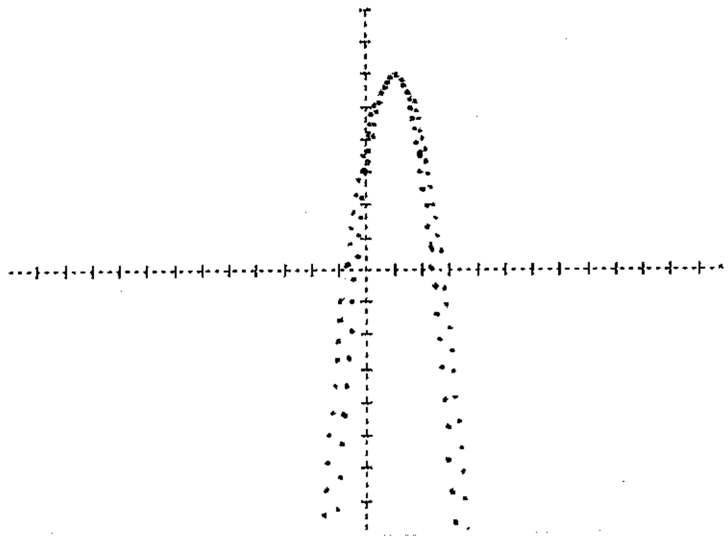
P2 :	-3	2	7
Actions :			
R :	-3	3	0
R :	-3	3	4
R :	-3	3	7


1
2
3
4
Exercice 8 : 2 (x+1)²+4
P2 : 2 -1 4
Actions :
R : 1 1 4
R : 3 -1 4
R : 2 -1 4

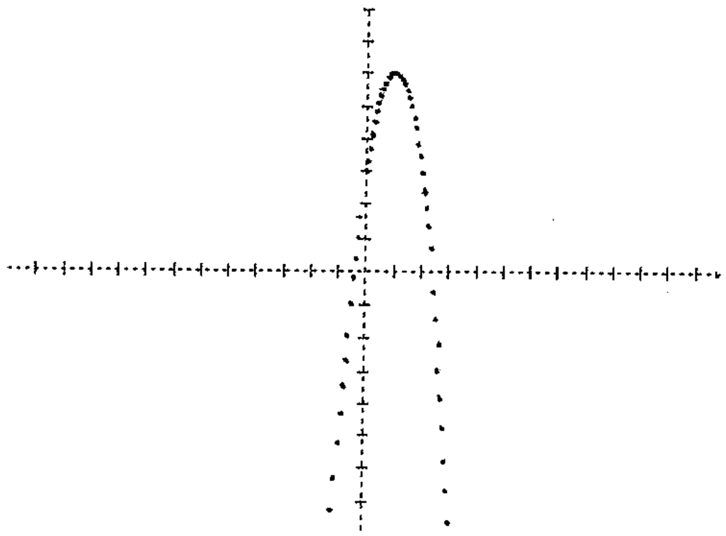
1



2



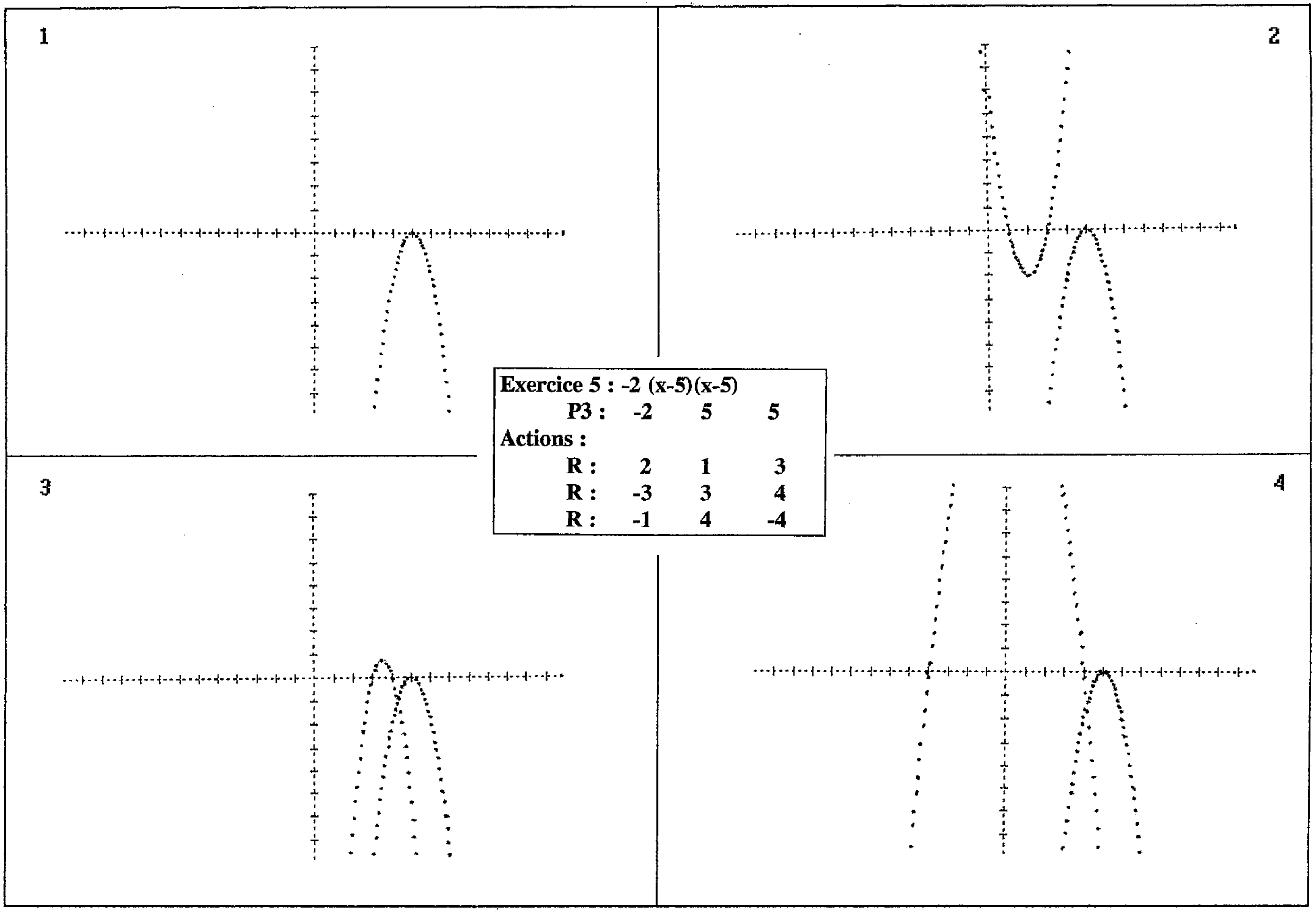
3

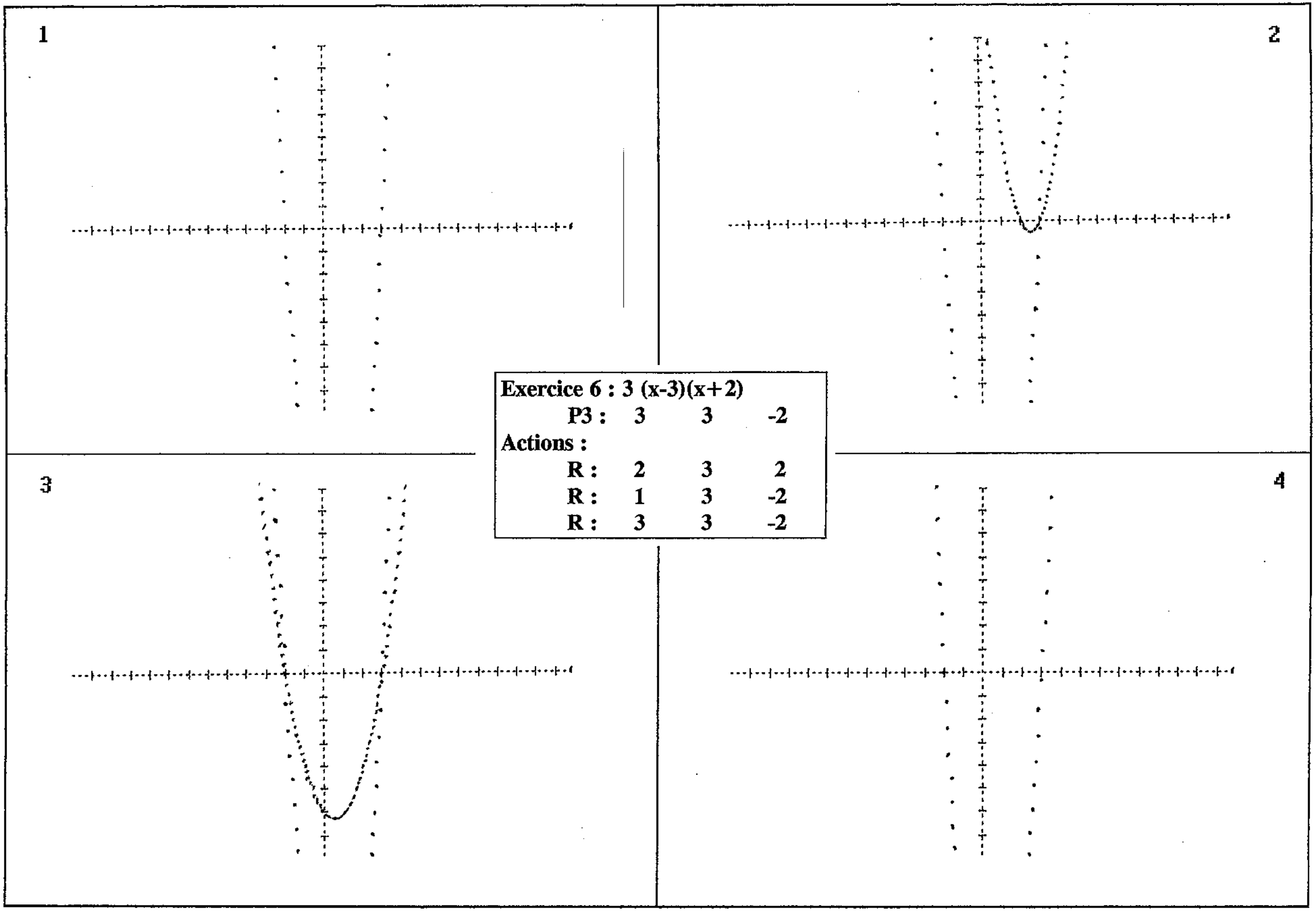


Exercice 9 : $-3\,(x-1)^2+6$

P2 :	**-3**	**1**	**6**
Actions :			
R :	**-2**	**1**	**6**
R :	**-3**	**1**	**6**

RECOPIES D'ECRAN DE LA SEANCE D'ISABELLE

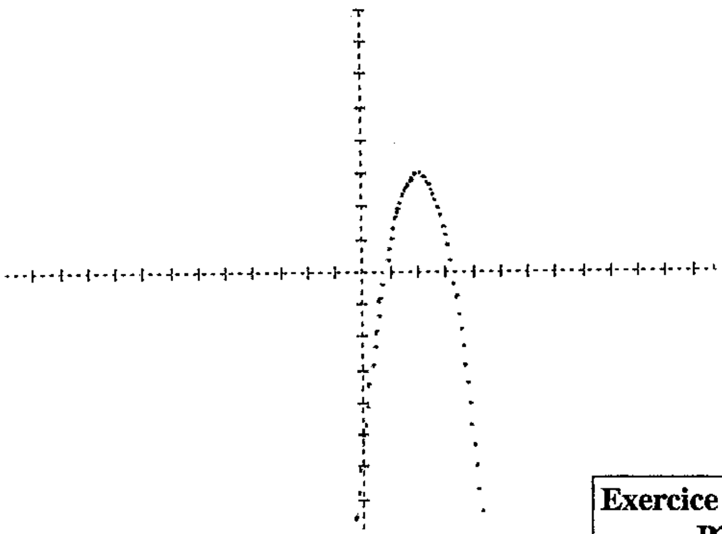

1
2
3
4
Exercice 5 : -2 (x-5)(x-5)
P3 : -2 5 5
Actions :
R : 2 1 3
R : -3 3 4
R : -1 4 -4



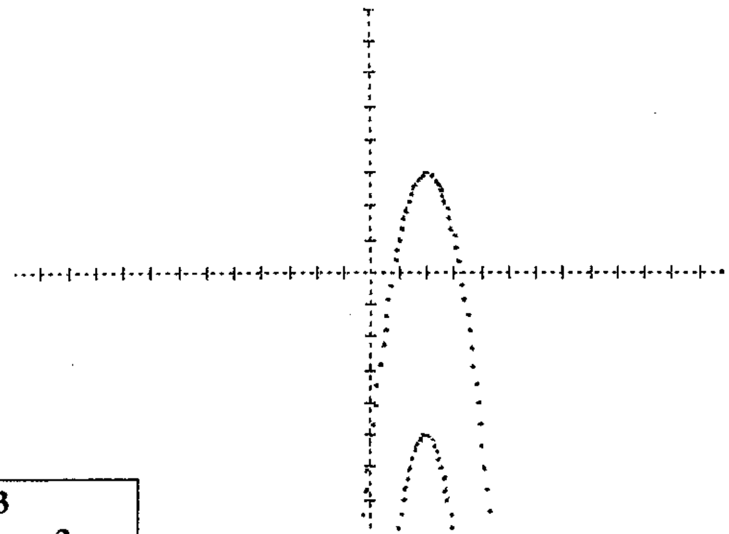
Exercice 6 : 3 (x-3)(x+2)

P3 :	**3**	**3**	**-2**
Actions :			
R :	**2**	**3**	**2**
R :	**1**	**3**	**-2**
R :	**3**	**3**	**-2**

1



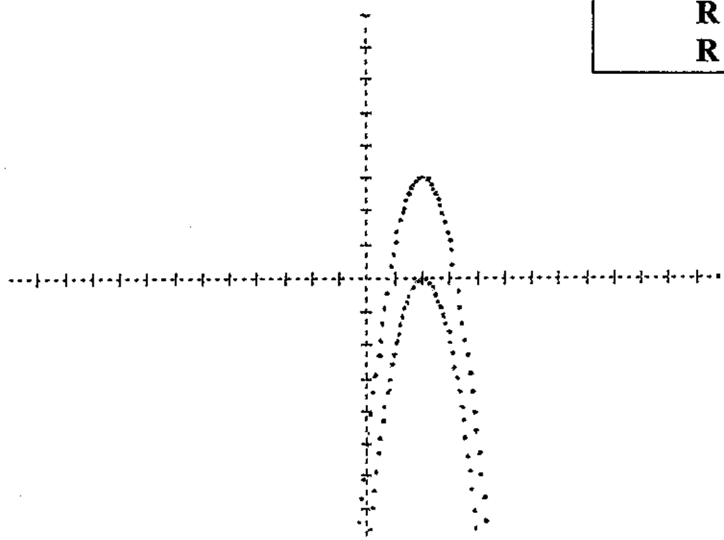
2



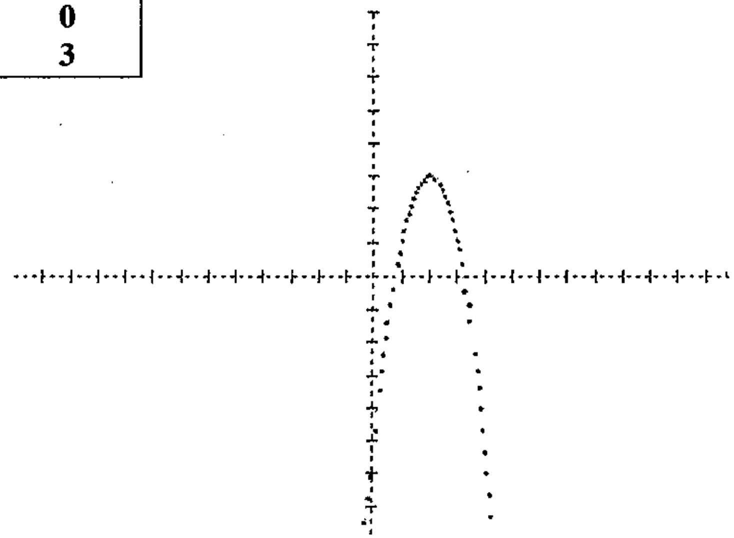
Exercice 8 : $-2\ (x-2)^2+3$

P2 :	**-2**	**2**	**3**
Actions :			
R :	**-3**	**2**	**-5**
R :	**-2**	**2**	**0**
R :	**-2**	**2**	**3**

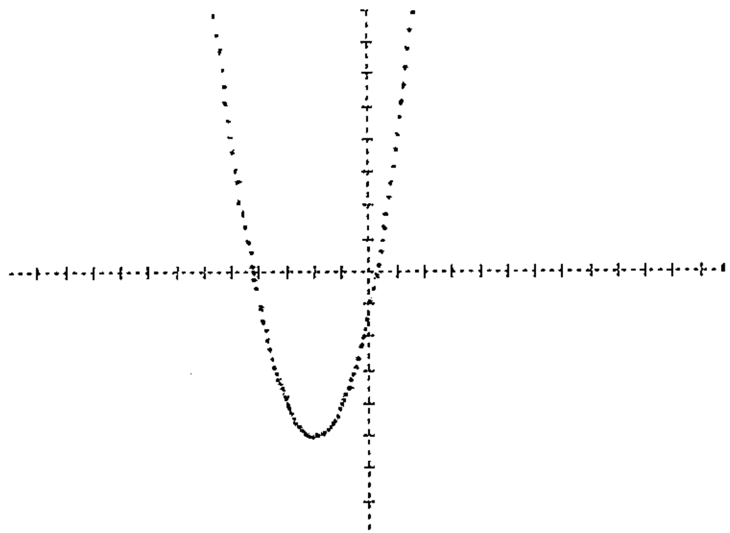
3



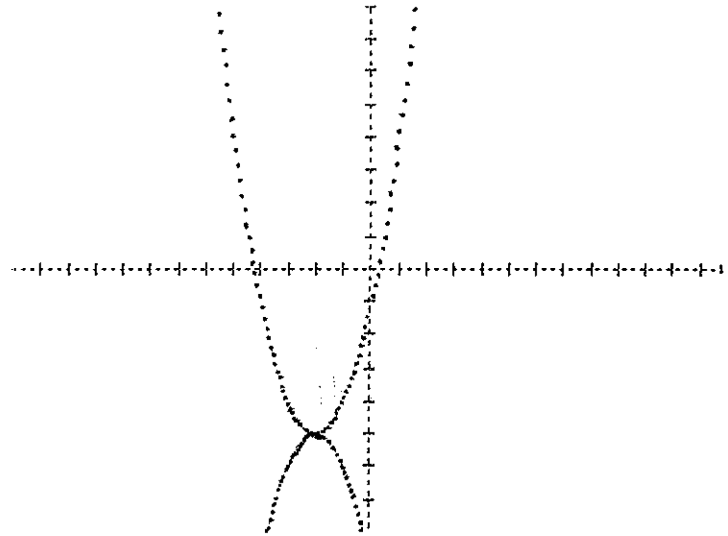
4



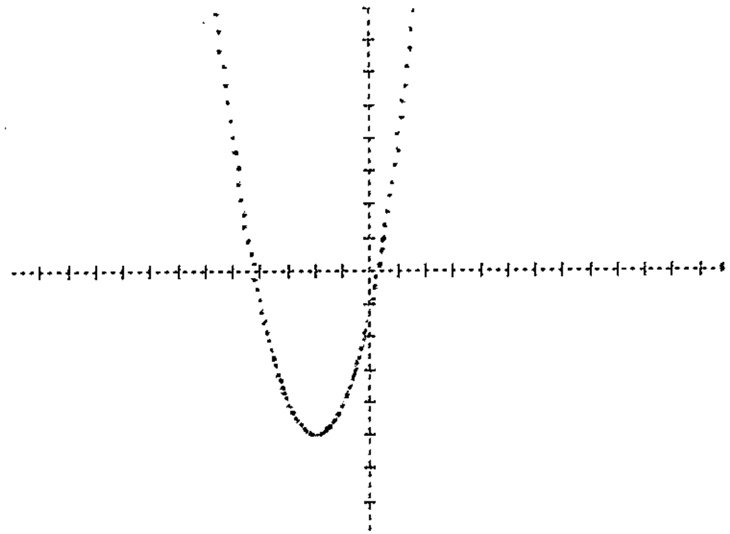
1



2



3



Exercice 9 : 1 $(x+2)^2$-5

P2 :	**1**	**-2**	**-5**
Actions :			
R :	**-1**	**-2**	**-5**
R :	**1**	**-2**	**-5**